INSTITUTO FEDERAL DO SERTÃO PERNAMBUCANO
CAMPUS SANTA MARIA DA BOA VISTA
LICENCITURA EM MATEMÁTICA

AURÉLIO SANDER PEREIRA DOS SANTOS

CÁLCULO DE ÁREA DE ELIPSES ORBITAIS ATRAVÉS DO CÁLCULO INTEGRAL

Santa Maria da Boa Vista – PE
2023

AURÉLIO SANDER PEREIRA DOS SANTOS

CÁLCULO DE ÁREA DE ELIPSES ORBITAIS ATRAVÉS DO CÁLCULO INTEGRAL

Monografia apresentada como Trabalho de Conclusão de Curso referente a Licenciatura em Matemática, Campus Santa Maria da Boa Vista do Instituto Federal do Sertão Pernambucano (IFSertãoPE), em cumprimento parcial dos requisitos para obtenção do grau de licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Me. Marcones de Oliveira Silva

Santa Maria da Boa Vista – PE
2023

AURÉLIO SANDER PEREIRA DOS SANTOS

Cálculo de Área de Elipses Orbitais através do Cálculo Integral

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado e aprovado na modalidade monografia referente a Licenciatura em Matemática, Campus Santa Maria da Boa Vista do Instituto Federal do Sertão Pernambucano (IFSertãoPE), em cumprimento parcial dos requisitos para obtenção do grau de licenciado em Matemática, sendo a Banca Examinadora composta pelos(as) professores(as):

Marcones de Oliveira Silva

Prof. Me. Marcones de Oliveira Silva
Instituto Federal de Educação do Sertão Pernambucano – IFSertãoPE
Orientador

Prof. Me. Robson Franklin de Aguiar Couto
Centro de Ensino Superior do Vale do São Francisco – CESVASF
Avaliador Externo

Deivd Andrade Porto

Prof. Me. Deivd Andrade Porto
Instituto Federal de Educação do Sertão Pernambucano – IFSertãoPE
Avaliador Interno

Santa Maria da Boa Vista – PE
2023

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

S237 Santos, Aurélio.

CÁLCULO DE ÁREA DE ELIPSES ORBITAIS ATRAVÉS DO CÁLCULO INTEGRAL / Aurélio Santos. - Santa Maria da Boa Vista, 2023.
45 f.

Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) -Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Sertão Pernambucano, Campus Santa Maria, 2023.
Orientação: Prof. Msc. Marcones de Oliveira Silva.

1. Cálculo. 2. Cálculo integral. 3. Área de elipses. 4. Órbitas elípticas. I. Título.

CDD 515

Gerado automaticamente pelo sistema Geficat, mediante dados fornecidos pelo(a) autor(a)

"A matemática é o alfabeto com o qual Deus escreveu o universo. "
(Galileu Galilei)

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a minha família por me dar todo apoio e suporte na minha escolha de ser educador.

Agradeço a Deus por tudo que vem preparando na minha vida e por tudo de bom que já me proporcionou até o presente momento.

Agradeço ao meu orientador, Professor Me. Marcones de Oliveira Silva, por todos os momentos de orientação e por todo apoio durante todo esse percurso acadêmico.

Agradeço em especial ao Professor Me. Deivid Andrade Porto, por todo empenho e ajuda mesmo não sendo meu orientador, me indicando vários materiais que puderam enriquecer este trabalho, e também por todo apoio que me deu durante a minha jornada acadêmica.

Agradeço também ao Professor Érico Cristiano Barbosa por me incentivar na continuidade do curso, aquelas palavras que o mesmo proferiu, me fizeram continuar buscando os meus objetivos dentro do curso, me mostrando o valor da persistência e perseverança.

RESUMO

Nesta monografia, investigamos a aplicação do cálculo integral para determinar a área de órbitas elípticas. A metodologia aplicada para a realização deste trabalho foi a de pesquisa bibliográfica onde se dará através de contribuições anteriores acerca da temática em questão. O objetivo deste trabalho é, portanto, estudar o uso do cálculo integral para determinar a área das órbitas elípticas, buscar aplicar esse conhecimento para descobrir os valores das áreas das órbitas planetárias. O estudo concentra-se em como o cálculo integral é fundamental para a compreensão da geometria das elipses, e como ele nos permite calcular precisamente a área abrangida por uma órbita elíptica. Examinaremos as contribuições da astronomia dos povos antigos para o entendimento do cosmos, exploraremos os principais conceitos do cálculo integral, as leis de Kepler, a geometria da elipse, e, em seguida, mostraremos passo a passo como calcular a área de uma órbita elíptica. Após isso aplicaremos o cálculo integral para verificar a área das órbitas elípticas dos planetas vistos a olho nu do sistema solar.

Palavras-chave: Cálculo integral. Área de elipses. Órbitas elípticas.

ABSTRACT

In this monograph, we investigate the application of integral calculus to determine the area of elliptical orbits. The methodology applied to carry out this work was bibliographical research which will take place through previous contributions on the topic in question. The objective of this work is, therefore, to study the use of integral calculus to determine the area of elliptical orbits, seeking to apply this knowledge to discover the values of the areas of planetary orbits. The study focuses on how integral calculus is fundamental to understanding the geometry of ellipses, and how it allows us to precisely calculate the area covered by an elliptical orbit. We will examine the contributions of ancient astronomy to the understanding of the cosmos, explore the main concepts of integral calculus, Kepler's laws, the geometry of the ellipse, and then show step by step how to calculate the area of an elliptical orbit. After that, we will apply integral calculation to verify the area of the elliptical orbits of the planets seen with the naked eye in the solar system.

Keywords: Integral calculus. Ellipse area. Elliptical orbits.

LISTA DE TABELAS

TABELA 1- PARAMETROS ORBITAIS DOS PLANETAS..40

LISTA DE FIGURAS

Figura 1- Sistema de coordenadas dos chineses..17
Figura 2- Sistema geocêntrico..18
Figura 3- Diagrama de um movimento elíptico gerado por
movimentos circulares 19
Figura 4- Sistema heliocêntrico..20
Figura 5- Gráfico da soma de Riemann..23
Figura 6- Representação da propriedade de uma elipse...31
Figura 7- Representação gráfica do afélio (Ra) e periélio (Rp) 31
Figura 8- Representação gráfica em coordenadas polares..32
Figura 9- Representação da lei das órbitas...37
Figura 10- Representação da lei das áreas...38
Figura 11- Representação da área de Mercúrio..41
Figura 12- Representação da área de Vênus...42
Figura 13- Representação da área de Terra..42
Figura 14- Representação da área de Marte...42
Figura 15- Representação da área de Júpiter..43
Figura 16- Representação da área de Saturno..43

LISTA DE SÍMBOLOS

Conceitos básicos

A	Área da elipse orbital.
a	Semieixo maior da elipse.
b	Semieixo menor da elipse.
e	Excentricidade da elipse.
θ	Ângulo polar em coordenadas elípticas.
$r(\theta)$	Função de distância em relação ao foco da elipse.
r:	Vetor posição que descreve a posição de um objeto na elipse.
$F1\ e\ F2$	Focos da elipse.
P	Ponto na elipse.
$d(P, F1)\ e\ d(\ P, F2)$	Distâncias entre o ponto P e os focos F1 e F2, respectivamente.
$d1\ e\ d2$	Distâncias focais, ou seja: d(P,F1) e d(P, F2).
$\Delta\ \theta$	Diferença entre ângulos polares.
$d\theta$	Elemento de ângulo diferencial.
$\int$	Sinal de integração.
$\frac{\mathrm{dA}}{\mathrm{d\theta}}$	Taxa de variação da área com relação ao ângulo polar.
$\frac{\mathrm{dr}}{\mathrm{d\theta}}$	Taxa de variação da distância com relação ao ângulo polar.
dA	Elemento de área diferencial.
π	Constante matemática pi.
$\int_{\theta 1}^{\theta 2}$	Integração definida entre os ângulos θ1 e θ2
Σ	Símbolo do somatório

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 13

2 ASTRONOMIA ANTIGA 16

1.1 Os babilônicos 16
1.2 Os egípcios 16
1.3 Os chineses 17
1.4 Modelos Astronômicos 18
1.4.1 *Ptolomeu e o modelo Geocêntrico* 18
1.4.2 *Copérnico e o modelo heliocêntrico* 19

3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA 22

3.1 Fundamentos do cálculo integral 22
3.1.2 Definição do cálculo integral e integral definida.. 22
3.1.3 Regras de integração para funções polinomiais, Trigonométricas e exponenciais 24
3.1.4 *Teorema Fundamental do Cálculo* 29
3.2 Geometria da Elipse.. 30
3.2.1 Definição da elipse e sua equação geral.. 30
3.2.2 Área de uma Elipse.. 33
3.2.3 Cálculo da Área de Elipses Orbitais.. 35
3.2.4 Área de uma Fatia de Elipse.. 35
3.3.5 Cálculo da Área Total 36
3.3 Leis de Kepler *36*
3.3.1 Tycho Bhahe 36
3.3.2 Primeira lei: Lei das órbitas 37
3.3.3 Segunda lei: Lei das áreas 37
3.3.4 Terceira lei: Lei Harmônica 38

4 EXEMPLOS E APLICAÇÕES 40

4.1 Calculando as áreas das órbitas elípticas de planetas vistos a olho nu do Sistema solar usando o cálculo integral 40

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS 44

REFERÊNCIAS 45

1 INTRODUÇÃO

Há registos históricos de que a astronomia antiga emergiu como uma janela para o entendimento do universo e da nossa própria existência quando o conhecimento humano enfrentava as vastidões inexploradas do cosmos. Os primeiros povos antigos reconheciam nos céus uma fonte de inspiração, orientação, transcendência e buscavam um melhor entendimento do que os cercava.

Dentre esses povos, destacavam-se os babilônicos, que através de meticulosas tabulações celestes, vislumbravam padrões que sustentavam suas crenças e práticas. Onde as tabuletas cuneiformes eram testemunhos da busca pela compreensão das leis cósmicas e sua influência sobre a vida terrestre (Ponczek, 2011).

Os egípcios, por sua vez, erguiam pirâmides como monumentos não só ligadas à grandeza humana, mas também à harmonia celeste. Em outras palavras, as pirâmides alinhadas com precisão, demonstravam a sincronia entre a arquitetura terrena e os movimentos celestes. Essa conexão não só moldou a vida cotidiana, mas também permeou os mitos e rituais, assimilando o divino e o terreno (Ponczek, 2011).

Da mesma forma, as tradições chinesas revelam como o céu era uma presença constante na vida e no pensamento desses antigos sábios. A exploração das relações entre os corpos celestes e os eventos terrestres, resultou em calendários complexos que celebravam a interdependência entre a natureza e o homem. Essa abordagem transcendeu o pragmatismo, tornando-se uma filosofia intrínseca à cultura chinesa (Ponczek, 2011).

Então, as contribuições destas civilizações foram de suma importância, pois estes ensinamentos que foram vislumbrados ao longo dos tempos, e mostraram que independentemente das crenças que eram utilizadas pelas mesmas, podíamos compreender notoriamente a relação matemática que ali estava presente, e com o passar dos anos outros estudiosos puderam desenvolver suas ideias sobre sistemas cosmológicos que remodelaram a compreensão do universo.

Após esse período abriu-se uma dualidade de compreensão dos movimentos celestes através do sistema ptolomaico e heliocêntrico os quais discutiam-se as seguintes prerrogativas: o sistema ptolomaico é retratado como um testemunho da perspicácia grega, no qual a Terra ocupava um lugar central, cercada por esferas celestiais em órbita, em contra partida o sistema heliocêntrico de Copérnico vislumbra um marco audacioso, onde a Terra e os planetas dançavam ao redor do Sol, a história desses sistemas se desenrola, destacando a luta intelectual pela verdade cósmica, que perdurou por muito tempo (Ponczek, 2011).

Foi no profundo estudo sobre esses modelos astronômicos anteriormente citados que uma versão refinada do modelo geocêntrico proposto no início da civilização grega prevaleceu durante toda a era medieval tanto no oriente quanto no ocidente trazendo para os astrônomos da época várias revelações e entendimentos, que posteriormente viria ser contestada pelos defensores do heliocêntrismo (Saraiva, 2014; Souza, 2014).

Um pouco a frente desta época, destacou-se o astrônomo-matemático, Johannes Kepler que por meio do seu mentor Tycho Brahe e de seus dados astronômicos, revolucionou o entendimento sore o movimento dos corpos celestes, que ficou conhecida na demasiada época como “astronomia nova”. Kepler através dos seus estudos criou três leis para os movimentos celestes: A lei das órbitas elípticas (1609), lei das áreas (1609) e lei harmônica (1609), que fundamentavam seus estudos, e que certamente representava um salto na compreensão de tais fatores. (Saraiva, 2014; Souza, 2014).

Foi por intermédio destes conhecimentos, que hoje podemos aplicar o cálculo integral para calcular a área de órbitas elípticas, através da compreensão da geometria da elipse, para assim, vislumbrar a obtenção dessas áreas obtendo uma atualização desses dados astronômicos. Portanto, compreendendo que cálculo integral é uma ferramenta matemática essencial e que permite a análise de áreas sob curvas, o cálculo de volumes de sólidos tridimensionais e a modelagem de processos contínuos em várias disciplinas, como física, engenharia e economia que de fato percebemos a sua grande notoriedade e importância (Stewart, J. Cálculo - Volume 1. 2006).

Para isso, a metodologia aplicada para a realização deste trabalho foi a de pesquisa bibliográfica onde se dará através de contribuições anteriores acerca da temática em questão.

O objetivo deste trabalho foi, portanto, estudar o uso do cálculo integral para determinar a área das órbitas elípticas dos planetas vistos a olho nu e buscar aplicar esse conhecimento para descobrir os valores dessas áreas e entender a importância das integrais geométricas em elipses o que permite calcular com precisão essas áreas. Esse trabalho será organizado de acordo com o seguinte caminho a seguir.

No capítulo 2 falaremos um pouco sobre a história dos povos antigos e sua relação com a astronomia e matemática.

Na seção 2.1 discutir-se a civilização babilônica e sua forma de entendimento do cosmos e de sua compreensão matemática. Na seção 2.2 abordaremos os povos egípcios e sua relação com a astronomia. Na seção 2.3 será apresentada como era a visão dos povos chineses em relação a compreensão do universo.

Na seção 2.4 serão apresentados sobre os modelos astronômicos que foram propostos por Cláudio Ptolomeu, e Nicolau Copérnico e explicaremos os dois em subseções posteriores a essa.

Na subseção 2.4.1 será explorado o sistema Ptolomaico e suas características no entendimento dos corpos celestes. Na subseção 2.4.2 mostraremos o sistema heliocêntrico de Copérnico e o seu entendimento sobre os movimentos dos planetas.

No capítulo 3 será introduzido uma abordagem teórica necessária para entender o trabalho como um todo. Este capito vai estar dividido em três seções.

Na subseção 3.1 abordar-se-á explicação do que é o cálculo integral, e para que serve. Na subseção 3.1.2 será trabalhada a definição do cálculo integral e sua relação com o cálculo diferencial. Na subseção 3.1.3 serão apresentados como são as regras de integração para funções polinomiais, trigonométricas e exponenciais. Na subseção 3.1.4 denotaremos o teorema fundamental do cálculo e suas aplicações.

Na seção 3.2 serão explicadas as leis de Kepler e a importância que as mesmas tiveram para um novo entendimento da mecânica celeste. Esta seção esta dividia em quatro subseções.

Na subseção 3.2.1 abordaremos um breve relato das contribuições que Tycho Brahe deixou para que Johannes Kepler pudesse dar continuidade ao entendimento dos movimentos dos planetas. Na subseção 3.2.2 explicaremos a primeira lei: lei das orbitas elípticas. Na subseção 3.2.3 descreveremos a segunda lei: leis das áreas. Na subseção 3.2.4 explanaremos a terceira lei: lei harmônica.

Na seção 3.3 será abordada a geométrica da elipse, esta seção está dividida em cinco subseções.

Na subseção 3.3.1 será abordada a definição da elipse e sua equação geral, através da sua propriedade. Na subseção 3.3.2 será mostrado, passo a passo como é dada a área de uma elipse Na subseção 3.3.3 será descrito como calcular a área de elipses orbitais. Na subseção 3.3.4 mostraremos como é dada a área de uma fatia da elipse. Na subseção 3.3.5 exemplificaremos como é dada a área total de uma elipse.

No capítulo 4 realizara-se a aplicação do cálculo integral. O capitulo será dividido em apenas uma seção.

Na seção 4.1 calcularemos as áreas das orbitas elípticas de planetas vistos a olho nu do sistema solar usando o cálculo integral.

2 ASTRONOMIA ANTIGA

Neste capitulo será abordado como os povos antigos buscavam compreender o cosmos através de suas crenças e o papel que a matemática possuía nesses entendimentos e de como esses conhecimentos nortearam os futuros estudiosos que subsequentemente a este período vieram a criar os primeiros modelos astronômicos aristotélicos que ficaram conhecidos como modelo geocêntrico e heliocêntrico.

2.1 Os babilônicos

Há registros históricos que os babilônios viveram a aproximadamente dois mil anos a.C., eles eram uma civilização politeísta e possuíam em sua época um grande conhecimento matemático sobre grandezas e medidas, sobre equações de primeiro e segundo grau e sobre o número “Pi” dentre outros conhecimentos essenciais da matemática (Ponczek, 2011). Isso possibilitou que essa sociedade tivesse grande representatividade entre os povos antigos, também eram excelentes astrônomos, pois já conheciam através de suas observações celestes cinco planetas, e puderam compreender como os eclipses aconteciam, onde essas práticas astronômicas possuíam significância política mais também com principal enfoque na religião (Ponczek, 2011).

Esses conhecimentos mostravam o quanto essa civilização era evoluída e o quanto esses estudos puderam contribuir para o entendimento do universo, onde os mesmos faziam mapas onde registravam-se os dados após as observações celestes, e faziam previsões baseadas em procedimentos aritméticos, utilizando essas informações (Pires, 2008).

2.2 Os egípcios

Os egípcios baseavam os seus conhecimentos e crenças em deuses e associavam essas crenças as suas construções e estruturas, buscando alinhá-las com as estrelas do cinturão de Orion.

Eles também tinham conhecimento em geometria e usavam para resolver problemas práticos como: divisão de terras e marcação de ângulos retos. Em várias de suas demarcações utilizava-se a regra de triângulos retângulos de lados proporcionais a 3, 4 e 5, mesmo sem conhecer o teorema de Pitágoras. Eles tinham um calendário de 354 dias com 12 meses de 29 e 30 dias através de seus modelos cosmológicos (Ponczek, 2011).

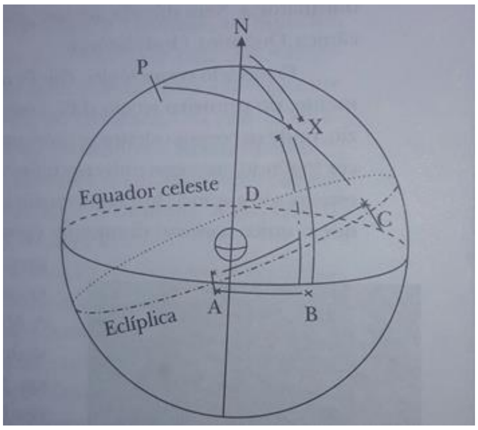
Via-se que mesmo que suas crenças não fossem baseadas em conhecimentos puramente científicos- matemáticos, era um povo que usava alguns desses conhecimentos para organizar e estruturar a sua sociedade, para isso usava uma elite de sacerdotes que possuíam vasto conhecimento em astronomia, onde foram capazes de alinhar templos com o plano de rotação aparente do sol.

2.3 Os chineses

Ponczek (2011) explica que os chineses por sua vez baseavam suas crenças em uma dualidade de organização das coisas, onde o que regia o mundo não era um deus, portanto não compartilhavam das ideias de simetria e beleza e imutabilidade do cosmos vistas anteriormente pelos gregos, esses ideais os tornaram grandes astrônomos que descreviam com grande notoriedade e naturalidade eventos celestes como aparições de cometas, estrelas supernovas ou até mesmo manchas solares que só vieram a ser melhores explicadas após o fim da idade média, vale ressaltar que esses estudos só vieram à tona a partir de 1960.

Eles também introduziram nas suas observações astronômicas um sistema de coordenadas angulares (representado a baixo na figura 1) de latitude e longitude. Tais medidas eram dadas a partir do equador celeste e não de uma órbita aparente do sol (elipse). Esse sistema se mostrou mais simples e posteriormente foi utilizado no ocidente, onde ficou conhecido como ciclo metoniano (devido a Meton de Atenas) de 235 lunações, que equivaliam a 12 anos de 12 meses com o calendário solar de 7 anos de 13 meses, período de tempo que os calendários lunares coincidiam com os solares, assim mostrado na imagem abaixo. (Ponczek, 2011).

Figura 1- Sistema de coordenadas dos chineses.



Fonte. **Origens e evolução das ideias da física**. Pag. 47

2.4 Modelos Astronômicos

Nesta seção explicaremos como eram os modelos astronômicos de Ptolomeu e Copérnico, que propiciaram um salto no entendimento dos movimentos dos corpos celestes e explicaremos as consequências que ideias cosmológicas tiveram no entendimento de uma astronomia desmistificada de crenças e voltada para explicações cientificas.

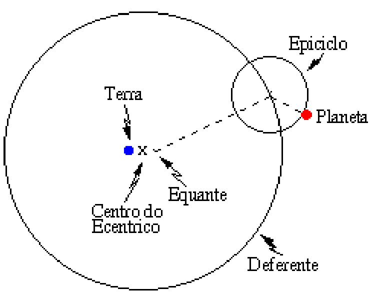
2.4.1 *Ptolomeu e o modelo geocêntrico*

Claudius Ptolomeu (110-170 d.C.) nasceu provavelmente no alto Egito, vivendo praticamente quase toda sua vida em Alexandria. Ele ganhou muita fama graças à sua obra monumental, "Almagesto", que foi considerada a base para a compreensão da astronomia-matemática no século XVII onde ficou conhecida como modelo geocêntrico e que possibilitou que outros estudiosos pudessem dar continuidade fazendo muitas contribuições (Ponczek, 2011).

Ele forneceu um modelo matematicamente detalhado dos movimentos do sol e da lua, sendo capaz de prever as datas de futuros eclipses que aconteceriam ao longo dos próximos anos. Em relação aos cinco planetas que conhecia-se com naturalidade na época em questão, Ptolomeu acrescentou novos artifícios geométricos, como os do excêntrico (achatamento), do epiciclo (pequeno círculo) e do deferente (círculo maior), inventados por Apolônio (Ponczek, 2011).

Em sua teoria lunar ele usou epiciclos, e ao estudar os planetas teve que descrever seus movimentos complexos de paradas, voltas e regressões, inventando o elegante dispositivo do equante, que era um ponto adicional em torno do qual o movimento circular era feito uniformemente, onde está representação não era o ponto central do deferente, tampouco o centro da terra, conforme representado na Figura 2.

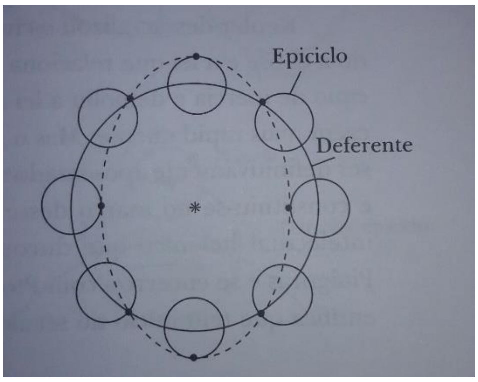
Figura 2- Sistema geocêntrico



Fonte. http://astro.if.ufrgs.br/p1/p1.htm. Acessado ás 22:00 horas do dia 25/08/23.

Na verdade o que ele conseguiu foi em uma linguagem atual, atribuir aos planetas orbitas elípticas, tendo a terra como foco, sem contudo deixar de usar o círculo como representação básica, podemos perceber essa relação na (Fig. 3).

Figura 3- Diagrama de um movimento elíptico gerado por movimentos circulares.



Fonte. Fig. 18- **Origens e evolução das ideias da física**. Pag. 69.

Esta teoria de Ptolomeu era totalmente coerente com a mecânica aristotélica da superposição dos movimentos circulares e representou um grande avanço para a época, onde ele defendia que a terra era o centro do universo através do seu sistema geocêntrico onde a terra era representada como o centro. Todos os estudiosos acreditavam realmente na veracidade das hipóteses apresentadas, mas com o passar dos anos outros estudiosos começaram a alavancar seus estudos sobre os movimentos dos corpos a partir deste modelo, e puderam observar avanços que eram necessários para um melhor entendimento do cosmos, onde entre eles destacou-se o astrônomo e matemático, Nicolau Copérnico que através de suas perspectivas, repensa esse modelo e traz novos significados (Ponczek, 2011).

2.4.2 *Copérnico e o modelo heliocêntrico*

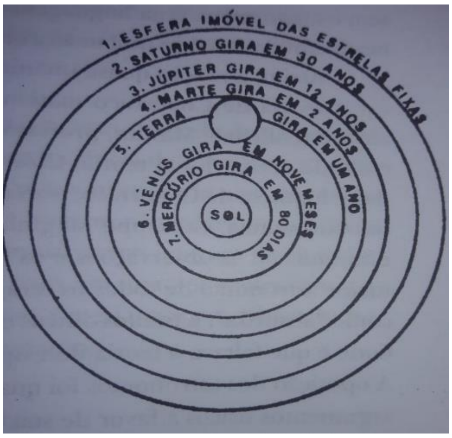
Nicolau Copérnico foi um jovem que nasceu em 19 de fevereiro de 1473, em Thora, na Prússia, onde hoje é conhecida como Polónia. Seu pai era um rico comerciante de cobre que morreu quando ele tinha doze anos, não existem muitos relatos sobre a sua mãe ao não se ser o nome, que era Bárbara (Ponczek, 2011).

Copérnico, começou os seus estudos sobre astronomia e matemática, percebeu que a explicação do modelo geocêntrico era inconsistente pois através da criação e uso do equante do geocentrismo, ele percebeu que os movimentos eram desiguais e destoavam da regra de que tudo no universo deveria girar em velocidades que fossem invariáveis (Ponczek, 2011).

Então, Copérnico através de seus estudos desenvolveu o seu próprio sistema denominado como sistema heliocêntrico que fundamentava-se em explicar a posição dos planetas e suas trajetórias excêntricas através de epiciclos, bem como reorganizar a posição dos planetas tirando a terra do centro e colocando o sol. Percebeu também que poderia verificar o comportamento da terra em relação aos outros astros (Ponczek, 2011).

Percebe-se que as ideias astronômicas-matemáticas deste modelo eram uma nova representação dos movimentos planetários, conforme mostrado na Figura 4.

Figura 4- Sistema heliocêntrico



Fonte: Fig. 22. O sistema heliocêntrico de Copérnico. **Origens e evolução das ideias da física**. Pag. 73.

Depois de suas pesquisas ele ganhou vários admiradores do seu trabalho que diziam que o mesmo revolucionaria a astronomia, porém mesmo admirando as pesquisas de Copérnico, muitos estudiosos da época denotavam o seu modelo como insano e absurdo porque não condiziam com os ideais da época (Ponczek, 2011).

Diante disso Copérnico escreveu o seu primeiro trabalho escrito de nome “Pequeno Comentário sobre as Hipóteses de Constituição do Movimento Celeste” em 1530, onde, mesmo com pouca visibilidade chamou a atenção do papa Clemente VII, que depois de lê-lo deu o seu consentimento para que fosse publicado (Pires, 2008).

Logo após isso, em meados de 1540, Joaquim Rético conseguiu a permissão de Copérnico para divulgar em Nuremberg sua obra “De Revolutionibus Orbium Coelestium” onde o prefácio da publicação era de autoria de André Osiander em dedicatória ao papa Paulo

III, no qual ele considerava a teoria de Copérnico como apenas uma hipótese, acredita-se que isso foi feito com o intuito de evitar reações negativas da igreja (Pires, 2008).

Diante disso, Copérnico não conseguiu explicar três problemas que surgiam com o seu novo modelo que eram: mostrar de alguma forma que a terra se move, desenvolver uma mecânica que fosse desassociada da aristotélica e também formular uma teoria gravitacional. Porem esses questionamentos puderam nortear outros estudiosos que mais a frente com Johannes Kepler viriam a revolucionar novamente a astronomia (Ponczek, 2011).

3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo buscaremos explicar previamente os assuntos que elucidem melhor a compreensão da abordagem com a qual fundamenta-se esse trabalho. Os assuntos discutidos referem-se ao cálculo integral, as leis de Kepler e geometria da elipse. Buscando trabalhar conceitos, formulas, demonstrações e exemplos, que facilitem o entendimento.

3.1 Fundamentos do Cálculo Integral

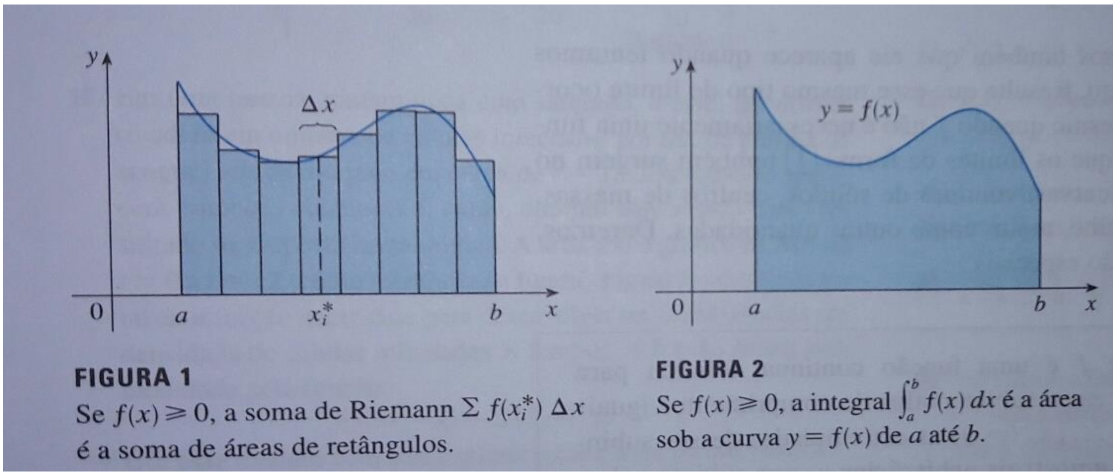
Esta seção visa compreender o que é o cálculo integral e também discutir as regras de integração para funções polinomiais, trigonométricas e exponenciais que são de extrema importância para a continuidade dos assuntos que virão subsequentemente. Está seção busca explicar o cálculo integral, fundamentando-se nos autores: (Stewart, 2006; Flemming; Gonçalves, 2006; Guidorizzi, 1987), onde a descrição usada possa ser entendida pelos leitores de diversos níveis acadêmicos, em relação ao que será apontado.

3.1.2 *Definição do cálculo integral e integral definida*

O cálculo conhecido como integral é uma parte da matemática que lida com acúmulo de quantidades infinitamente pequenas ao longo de um intervalo de tempo contínuo, usado para calcular áreas sob curvas, comprimentos de arcos, volumes de revolução de sólidos e outras quantidades que envolvem a adição de pequenas alterações (Stewart, 2006).

A definição básica do cálculo integral é dada em termos de uma soma de Riemann, que é uma aproximação do valor da integral através do uso de áreas de retângulos. Ao tentarmos dividir um intervalo contínuo em pequenos sub intervalos menores, e aproxima-los a curva por meio de segmentos retos, conseguimos calcular a área sob a curva como uma soma das áreas de retângulos que são formados pelos segmentos retos, conforme as figuras abaixo:

Figura 5- Gráfico da soma de Riemann.



Fonte: Fig. 1; Fig. 2.- gráfico da soma de Riemann. (Stewart, J. **Cálculo** - Volume 1. 2006) . Pag. 381.

Formalmente, a integral definida de uma função $f(x)$ em um intervalo [a, b], dada por:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \quad ,$$

representa a soma limite dos produtos de valores da função $f(x)$ em pontos discretos x_i multiplicados pelas infinitesimais diferenças Δx_i , à medida que o número de pontos discretos se aproxima do infinito:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f\left(x_i\right) . \Delta x_i$$

Onde, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, é a diferença entre os pontos discretos $x_i - x_{i-1}$ que varia de a até b. Essa expressão representa a acumulação da área dos retângulos infinitesimais formados pela multiplicação dos valores da função $f(x)$ nos pontos discretos x_i pelas correspondentes diferenças Δx_i conforme o número de retângulos aumenta indefinidamente (Stewart, 2006).

Dessa forma, a integral é um conceito que permite calcular a área sob a curva de $f(x)$ no intervalo [a, b], através da consideração de uma soma infinitesimal de produtos de valores da função e intervalos correspondentes.

3.1.3 *Regras de integração para funções polinomiais, trigonométricas e exponenciais*

As regras de integração são muito importantes na análise e interpretação dos conceitos matemáticos, pois possuem um papel norteador no entendimento dos processos resolutivos de problemas reais que envolvem a sua utilização. Essa perspectiva torna-se extremamente relevante, pois é através dessa compreensão que podemos observar o comportamento das funções através do cálculo integral. Serão apresentadas abaixo algumas das regras básicas de integração para as funções polinomiais, trigonométricas e exponenciais, com o intuito de compreender tais conceitos:

Regra da potência: Esta regra é aplicada aos termos polinomiais de uma função da forma ax^n , onde a é a constante e n é um número real não necessariamente inteiro. A integral de ax^n é dada por:

$$\int ax^n \, dx = \frac{ax^{n+1}}{n+1} + C$$

onde C é uma constante de integração.

Como por exemplo, resolvemos a seguinte integral abaixo da seguinte forma:

$$\int \left(4x^3 + 2x^2 - 5x + 1 \right) dx$$

Calculando a integral de cada termo aplicando a regra da potência temos:

$$\frac{4}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + x + C$$

onde C é a constante de integração.

Reescrevendo a expressão final obtemos:

$$x^4 + \frac{2x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + x + C$$

Já nas funções trigonométricas utiliza-se as integrais trigonométricas básicas e especiais que serão descritas abaixo:

Integrais das Funções Trigonométricas Básicas:

$$\int \sin(x)\,dx = -\cos(x) + C$$

$$\int \cos(x)\,dx = \sin(x) + C$$

Como, por exemplo, resolvemos as seguintes integrais abaixo da seguinte forma:

Exemplo 1:

$$\int \sin(2x)\,dx$$

Usando a identidade trigonométrica temos:

$$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$$

Então a integral torna-se agora:

$$\int 2\sin(x)\cos(x)\,dx$$

Agora aplicamos a regra de integração, e obtemos:

$$\sin^2 x + C$$

onde C é a constante de integração.

Para as chamadas funções trigonométricas especiais utilizamos as integrais da tangente, cotangente, secante, e cossecante:

$$\int \tan(x)\,dx = -ln\,|\cos(x)| + C$$

$$\int cot(x)\,dx = \ln|\sin(x)| + C$$

$$\int sec(x)\,dx = \ln|sec(x) + \tan(x)| + C$$

$$\int csc(x)\,dx = -\ln|csc(x) + cot(x)| + C$$

onde C é a constante.

Para as funções exponenciais utilizamos as seguintes regras de integração:

Integral de e^x:

$$\int e^x dx = e^x + C$$

Integral de a^x, onde a é uma constante positiva $a \neq 1$:

$$\int a^x\,dx = \frac{1}{\ln(a)}\,a^x + C$$

Integral de $\ln(x)$:

$$\int \ln(x)\,dx = x(\ln(x) - 1) + C$$

Integral de e^{kx}, onde k é uma constante:

$$\int e^{kx}\,dx = \frac{1}{k}\,e^{kx} + C$$

Mas para realizar o cálculo e a interpretação destas integrais, também devemos utilizar algumas técnicas de integração que são muitos importantes nas resoluções de integrais que necessitam de tais procedimentos, e que estão descritas abaixo:

Técnica de substituição:

A regra da substituição é uma técnica de integração que é responsável por integrar funções compostas, e tem como formula geral:

$$\int f\,(\,g(\,x)\,)\ .\ g'(\,x)\,dx = \int f\,(\,u)\,du = F(\,u)\,+C$$

Mas para entendermos melhor como está técnica é utilizada, vamos resolver um exemplo abaixo.

Calculando a integral pela técnica de substituição temos:

$$\int \sin^2(\,x)\,\cos(\,x)\,dx$$

$$Tomando\ u = \sin(\,x)\ \ e\ du = \cos(\,x)\,dx\ temos:$$

$$\int \sin^2(\,x)\,\cos(\,x)\,dx = \int u^2du = \frac{u^3}{3} + c = \frac{\sin^3(\,x)}{3} + c\,.$$

Técnica de integração por partes:

A integração por partes tem como objetivo integrar o produto de duas funções, transformando uma expressão de fatores integrantes de $u\ dv$ em $v\ du$ e sua formula é dada por:

$$\int u\ dv = uv\ -\int v\ du$$

Mas, para entendermos na prática, vamos resolver o seguinte integral:

$$\int \ln(\,x)\,dx$$

Utilizando a técnica de integração por partes, onde temos:

$$Usando\ u = \ln(\,x)\ \ e\ dv = dx,\ \ ent\tilde{a}\,o, du = \frac{dx}{x}\ \ e\ v = x\,.\ Portanto\ temos:$$

$$\int \ln(x)\, dx = \int u\, du = uv - \int v\, du = x\, ln(x) - \int dx = x\, ln(x) - x + c$$

Técnica de substituição trigonométrica:

Esta artificio é usado quando temos uma expressão dada da seguinte forma:

$$\sqrt{a^2 + u^2}\,, \sqrt{u^2 - a^2}, \sqrt{a^2 - u^2}$$

Onde $a > 0$.

Vejamos abaixo um exemplo para melhor compreensão, resolvendo a seguinte integral:

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx =$$

$$Sendo\ x = a\sin(\theta)\ ;\ então,\ dx = a\cos(\theta)\, d\theta;\ \left(-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right)\ e\ \sqrt{a^2 - x^2} = a\cos(\theta)$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = a^2 \int \cos^2(\theta)\, d\theta = a^2 \int \left(\frac{1}{2} + \frac{\cos(2\theta)}{2}\right) d\theta = \frac{a^2}{2}\left(\theta + \frac{\sin(2\theta)}{2}\right)$$

$$= \frac{a^2}{2}(\theta + \sin(\theta)\cos(\theta))\ .$$

$$x = a\, sen(\theta)\ \ e\ -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2};\ então,\ \theta = arc\sin\left(\frac{x}{a}\right).\ então\ estamos\ dentro\ do\ caso\ 1:$$

$$onde\ c = \sqrt{a^2 - x^2};\ então,\ \sin(\theta) = \frac{x}{a}\ e\ \cos(\theta) = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a}.$$

Substituindo na integral temos como resultado:

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{a^2}{2}\left(arc\sin\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{x}{a^2}\sqrt{a^2 - x^2}\right) + c$$

Para um melhor aprofundamento dos 3 casos existentes na substituição trigonométrica, veja (Stewart, J. Cálculo - Volume 1. 2006).

3.1.4 *Teorema Fundamental do Cálculo e suas aplicações*

O teorema fundamental do cálculo torna-se essencial para uma boa analise da matemática que estabelece uma relação crucial entre o cálculo diferencial e o cálculo integral. Ele é composto por duas partes: O Teorema Fundamental do Cálculo (Parte 1) e a Parte 2. O Teorema Fundamental do Cálculo (Parte 1) denota que:

Seja $f(x)$ uma função continua em um intervalo fechado $[a, b]$, e seja $F(x)$ a função definida por:

$$F(x) = \int_a^x f(t)\ dt$$

onde $F(x)$ é a integral definida de *f(*t*)* de a até *x*. Então $F(x)$ é continua em $[a, b]$ e diferenciável em (a, b), e a sua derivada $F'(x) = f(x)$.

Portanto, isso denota que a integral definida de uma função continua $fornece$ uma função $F(x)$ cuja taxa de variação instantânea é igual à função original $f(x)$.

O Teorema Fundamental do Cálculo (Parte 2) diz que:

Se $f(x)$ é uma função contínua em um intervalo $[a, b]$, e $F(x)$ é uma antiderivada de $f(x)$ ou seja, $F'(x) = f(x)$. Então temos que:

$$\int_a^b f(x)\ dx = F(b) - F(a)$$

Essa seção do teorema estabelece a relação entre uma integral definida de uma função contínua e a diferença entre os valores da antiderivada $F(x)$ nos pontos a e b.

Em resumo, o Teorema Fundamental do Cálculo fornece a quem o usa uma poderosa ferramenta para calcular integrais definidas e estabelece uma conexão fundamental entre o cálculo diferencial e o cálculo integral. Pensando nessa perspectiva podemos compreender o quanto ele é fundamental para a compreensão e aplicação de conceitos-chave tanto em matemática, quanto em física e outros ramos relacionados.

Para melhor aprofundamento, com a demonstração completa do Teorema Fundamental do Cálculo, veja (Guidorizzi, 1987, pág. 469-470).

Portanto, entender a notoriedade que o cálculo integral tem na obtenção de áreas sob curvas, comprimentos de arcos, volumes de sólidos de revolução, etc., denotam a sua grande importância no que tange a abstração matemática, onde se faz possível mensurar áreas de regiões que estão fora do alcance para serem medidas como, por exemplo, áreas de elipses orbitais planetárias com grande precisão.

3.2 GEOMETRIA DA ELIPSE

Nesta seção, explicaremos o que é uma elipse e como chegamos na sua equação geral interpretando as suas propriedades, também buscaremos explicar como encontramos a área de uma elipse e como calculamos a área de uma elipse orbital, tanto de uma fatia como de sua área total. Esta seção é muito importante para a compreensão da geometria da elipse, pois será neste contexto que vários conhecimentos que foram trabalhados ao longo desta pesquisa serão utilizados.

3.2.1 Definição da elipse e sua equação geral

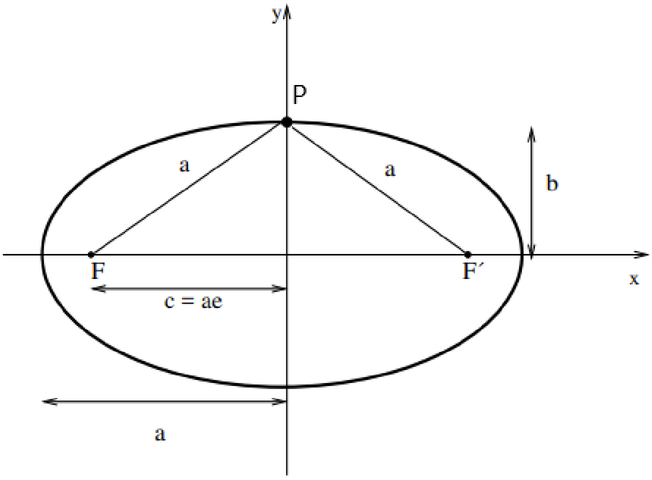
A elipse é uma curva fechada que é frequentemente vista em várias situações, como em planetas, satélites e outros corpos celestes que estão em órbita. Matemáticos e astrónomos se interessaram pela determinação de sua área desde o início da ciência.

Saraiva e Souza (2014) entendem que as propriedades de uma elipse são compostas por todos os pontos em um plano onde a soma das distâncias a dois pontos fixos, conhecidos como focos, é constante sendo o dobro da medida do eixo maior dessa elipse a soma dessas distâncias. Na figura 8, sejam F e F′, os focos, P localizado sobre a elipse e a seu semi-eixo maior, portanto:

$$FP + F'P = constante = 2a$$

Podemos ver claramente algumas relações na imagem abaixo:

Figura 6- Representação da propriedade de uma elipse.



Fonte: Representação da propriedade da elipse. **Astronomia e Astrofísica**. Pag. 103.

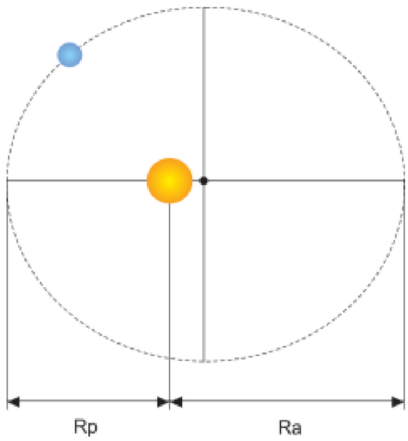
De acordo com Saraiva e Souza (2014), a excentricidade (e) da elipse aumenta com a distância entre os dois focos, sendo c a distância de cada foco do centro, a o semi-eixo maior e b o semi-eixo menor, então podemos definir a excentricidade da elipse da seguinte forma:

$$e = \frac{c}{a} = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}}$$

Como o ponto está precisamente sobre b, temos um triângulo retângulo, denotado por $a^2 = b^2 + c^2$.

Se pensarmos que um dos focos da órbita planetária é ocupado pelo Sol, o ponto dessa órbita mais próxima do Sol é denotado como (periélio), e o ponto mais distante de (afélio). Veja a figura 9.

Figura 7- Representação gráfica do afélio(R_a) e periélio(R_p).



Fonte: Representação gráfica do afélio e periélio. **Astronomia e Astrofísica**. Pag. 104.

Denotando o periélio como R_p, temos:

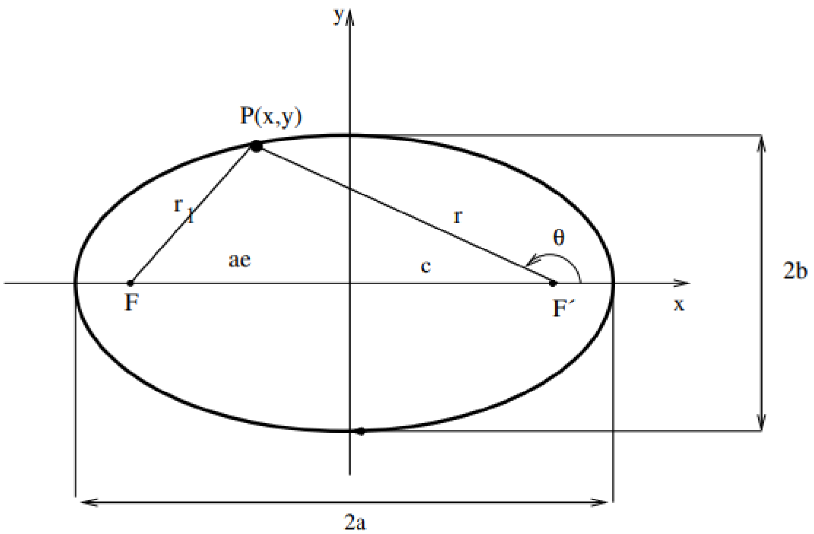
$$R_p = a - c = a - a.e = a(1 - e).$$

E também denotando o afélio como R_a, temos:

$$R_a = a + c = a + a.e = a(1 + e).$$

Podemos expressar a equação da elipse em coordenadas polares da seguinte forma:

Figura 8- Representação gráfica em coordenadas polares.



Fonte: Representação gráfica em coordenadas polares. **Astronomia e Astrofísica**. Pag. 104.

Na figura 10 acima, seja um ponto $P(r, \theta)$ ou $P(x, y)$ disposto sobre a elipse, onde θ é apontado como o ângulo do planeta em relação ao eixo x.

Utilizando a lei dos cossenos temos que:

$$r_1^2 = r^2 + (2ae)^2 - 2.r(2ae)\cos(\pi - \theta)$$
$$r_1^2 = r^2 + (2ae)^2 + 2.r(2ae)\cos$$

Pela definição de elipse temos:

$$r + r_1 = 2a$$

Então:

$$r_1 = 2a - r$$

$$(2a - r)^2 = r^2 + 4a^2e^2 + 4rae\cos(\theta)$$

$$4a^2 + r^2 - 4ar = r^2 + 4a^2e^2 + 4rae\cos(\theta)$$

$$a^2(1 - e^2) = ar(1 + e\cos\theta)$$

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+ecos(\theta)} \ (1)$$

A formula 1 é de extrema importância porque mostra a distância do planeta em relação ao sol em função do ângulo θ, e isso nos permite compreender o movimento que o planeta realiza em torno dessas coordenadas polares.

3.2.2 Área de uma elipse

Na figura 10, temos em coordenadas cartesianas:

$$r^2 = (x + ae)^2 + y^2 \ (2)$$

e

$$r_1^2 = (x - ae)^2 + y^2 \ (3)$$

Diminuindo (2) – (3), e empregando $r_1 = 2a - r$, temos:

$$r = a + ex \ (4)$$

Tendo em vista que o semi-eixo é dado por:

$$b^2 = a^2 - c^2 = a^2 - a^2.e^2$$

$$b^2 = a^2(1 - e^2)$$

Substituindo (4) em (2), obtemos a equação de uma elipse nas coordenadas cartesianas:

$$(a+ex)^2 = (x+ae)^2 + y^2$$

$$a^2 + 2aex + e^2x^2 = x^2 + 2aex + a^2e^2 + y^2$$

$$a^2 + e^2x^2 = x^2 + a^2e^2 + y^2$$

$$e^2x^2 + a^2 - a^2e^2 = x^2 + y^2$$

$$e^2x^2 + a^2(1-e^2) = x^2 + y^2$$

$$e^2x^2 + b^2 = x^2 + y^2$$

$$\frac{c^2}{a^2}x^2 + b^2 = x^2 + y^2$$

$$\frac{c^2}{a^2}x^2 - x^2 = -b^2 + y^2$$

$$x^2\left(\frac{c^2}{a^2} - 1\right) = -b^2 + y^2$$

$$x^2\left(\frac{c^2-a^2}{a^2}\right) = -b^2 + y^2$$

$$x^2\left(-\frac{b^2}{a^2}\right) = -b^2 + y^2$$

$$x^2\left(\frac{b^2}{a^2}\right) = b^2 - y^2$$

$$x^2\left(\frac{b^2}{a^2}\right) + y^2 = b^2$$

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

Ou

$$x = a\sqrt{1-\left(\frac{y}{b}\right)^2}$$

A área de uma elipse é representada por:

$$A = 4\int_0^b dy \int_0^x dx$$

$$A = 4\int_0^b a\sqrt{1-\left(\frac{y}{b}\right)^2}dy$$

Substituindo $y = b\ sin\ z,$ e $dy = b\cos z\ dz$ temos:

$$A = 4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - (\sin z)^2} \cos z \, dz$$

E como pela identidade trigonométrica, $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$, então, $1 - \sin^2 z = \cos^2 z$, resultando assim em:

$$A = 4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 z \, dz$$

e como:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 z \, dz = \frac{\pi}{4}$$

Então:

$$A = \pi ab$$

3.2..3 Cálculo da Área de Elipses Orbitais

Utilizamos o conceito de integração para calcular a área de uma elipse orbital. Para começar, parametrizamos uma equação da elipse em coordenadas polares, para que isso nos permita mostrar a posição de um ponto na elipse através de um ângulo θ.

Usamos a seguinte representação:

$$x = a.\cos(\theta)$$
$$y = b.\sin(\theta)$$

onde θ varia de 0 a 2π.

3.2.4 Área de uma fatia de elipse

De acordo com Stewart, J. **Cálculo** - Volume 1. 2006, considere uma seção infinitesimal da elipse que é representada pelo ângulo $\Delta\theta$, onde um setor circular com raio r e ângulo $\Delta\theta$ pode ser utilizado para aproximar essa porção, onde a área dA pode ser calculada por:

$$dA = \frac{1}{2} r^2 \, d\theta$$

3.3.5 Cálculo da Área total

A área total da elipse, pode ser encontrada integrando a área da fatia em relação ao ângulo θ, através da seguinte integral:

$$\int_{0}^{2\pi} \frac{1}{2}\left(a^2 \cos^2(\theta) + b^2 \sin^2(\theta) \right)$$

Então fazemos as devidas manipulações algébricas para resolver a integral e obter a fórmula geral para a área de elipses orbitais.

3.3 Leis de Kepler

Nesta seção abordaremos as contribuições astronômicas de Tycho Bhahe voltadas para o entendimento dos movimentos dos corpos celestes, onde ele deixou para que Johannes Kepler pudesse dar continuidade aos seus estudos. Abordaremos também as três leis de Kepler que na sua época ficaram conhecidas por revolucionar o entendimento da mecânica celeste e que foram muito importantes para que outros estudiosos pudessem dar continuidade.

3.3.1 *Tycho Bhahe*

Tycho Brahe (1546-1601) veio ao mundo alguns anos depois do falecimento de Copérnico, ele usou instrumentos que o mesmo construiu para observar com precisão as posições de planetas e estrelas, em muitas situações, a sua precisão era superior a 1 minuto de arco (1/30 do diâmetro do Sol) (Saraiva; Souza, 2014).

Tycho recebeu ajuda do rei da Dinamarca, Frederic II (1534-1588) após ser expulso da sua terra natal. Porém, depois do falecimento do rei havia-se perdido esses privilégios pois não havia uma boa relação com o sucessor do trono, sendo em 1597 obrigado a deixar a Noruega. Após isso ele foi para Boemia, em Praga, trabalhar para o imperador. (Saraiva; Souza, 2014).

Em 1600, um ano antes de seu declívio de vida, Tycho contratou para ajudá-lo na análise das informações sobre os planetas coletadas ao longo de 20 anos, o matemático alemão Johannes Kepler (Saraiva; Souza, 2014).

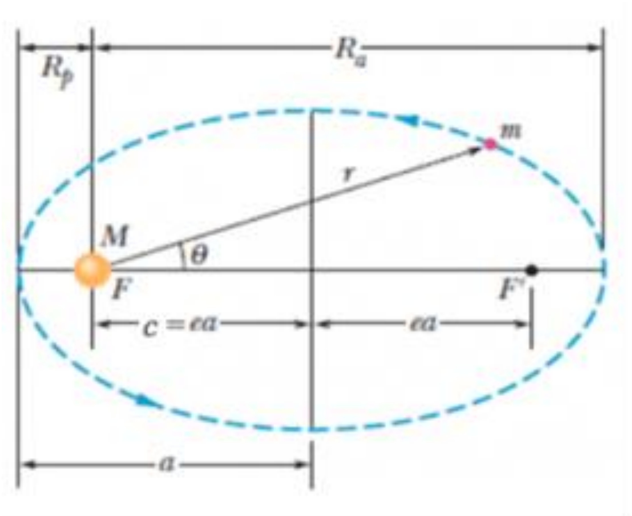
Em suas pesquisas astronômicas Bhahe não acreditava na a teoria heliocêntrica de Copérnico, mas foram essas indagações e buscas pela verdade através dessas observações celestes que propiciaram a kepler a formulação das leis dos movimentos planetários.

3.3.2 *Primeira Lei: Lei Das Órbitas*

A órbita dos planetas no sistema solar é uma elipse tendo o Sol como seu foco. A distância entre o Sol e o planeta vai mudar ao longo de sua trajetória devido à sua órbita ser elíptica (Saraiva, 2014; Souza, 2014).

Podemos identificar mais detalhadamente através da imagem abaixo:

Figura 9- Representação da lei das órbitas.



Fonte: http://www.ime.unicamp.br/~apmat/leis-de-kleper-e-as-elipses/ acessado dia 10/10/2023

Onde:

a → representa o semieixo maior

$e = c/a$ → representa a excentricidade da elipse (quando muito pequena, a elipse se parece com uma esfera)

m →representa o planeta

F e F\` →focos da elipse

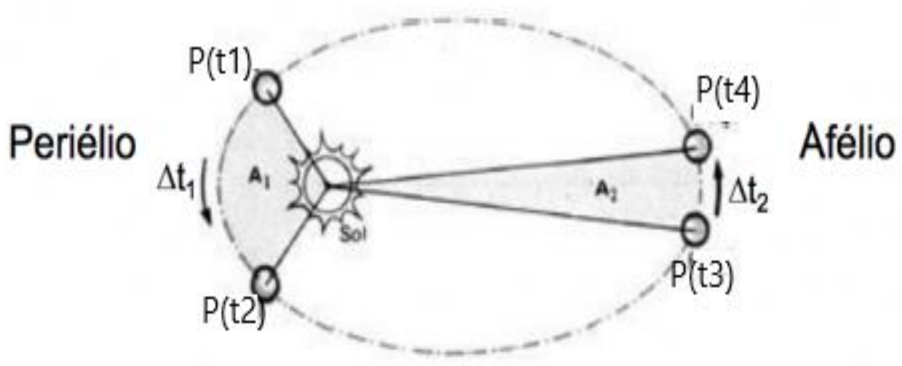
Rp → distância do periélio (ponto mais próximo do sol)

Ra →distância do afélio (ponto mais afastado do sol)

3.3.3 *Segunda Lei: Lei Das Áreas*

A reta que conecta o planeta ao Sol atravessa "áreas iguais em tempos iguais". O significado físico dessa lei é que embora não seja uniforme, a velocidade orbital varia de forma regular à medida que o planeta está mais distante do Sol, mais devagar ele se move. De outra forma, essa lei afirma que a velocidade areal é constante (Saraiva; Souza, 2014).

Figura 10- Representação da lei das áreas.



Fonte: http://www.ime.unicamp.br/~apmat/leis-de-kleper-e-as-elipses/ acessado dia 10/10/2023

onde:

$$\frac{A1}{\Delta t} = \frac{A2}{\Delta t}$$

3.2.4 *Terceira Lei: Lei Harmônica*

O quadrado do período de translação (período sideral) dos planetas é absolutamente proporcional ao cubo de sua distância relativa ao Sol. Esta lei diz que planetas com órbitas mais longas se movem em um ritmo mais lento em torno do Sol, o que significa que a força gravitacional entre o Sol e o planeta diminui de acordo com a distância (Saraiva; Souza, 2014).

A terceira lei pode ser expressa como:

$$P^2 = Ka^3$$

onde P é o período sideral do planeta, a é o semi-eixo maior da órbita, que equivale à distância média entre o planeta em questão e o Sol e K uma constante.

Devido a essas leis, Johannes Kepler tornou-se conhecido na época por causa de seus grandes avanços, e foram esses estudos que propiciaram o entendimento dos movimentos dos planetas e até mesmo a mecânica celeste. Com o passar dos anos, novos questionamentos surgiram sobre as suas leis, o que motivou a continuidade e aperfeiçoamento de novas teses e modelos astronômicos, alavancados por astrônomos, físicos e matemáticos que estudaram posteriormente.

4 EXEMPLOS E APLICAÇÕES

Neste capitulo buscaremos aplicar os conhecimentos que foram trabalhados anteriormente, calculando as áreas das elipses orbitais de planetas do sistema solar.

4.1 Calculando as áreas das orbitas elípticas de planetas vistos a olho nu do sistema solar usando o cálculo integral.

Para calcular as devidas áreas das elipses planetárias, alguns dados tornam-se essenciais.

Na Tabela 1 apresenta-se, os paramentos orbitais dos planetas do sistema solar em Unidades Astronômicas (U.A.), as medidas A (afélio) e P (periélio) e as excentricidades, (e) das orbitas dos planetas. Esses dados encontram-se na "NASA Solar System Dynamics Group", através do site: (https://ssd.jpl.nasa.gov/).

Tabela 1 - PARAMETROS ORBITAIS DOS PLANETAS

Planeta	**A (U.A)**	**P (U.A)**	***e***
Mercúrio (ME)	0,46670	0,30750	0,20563
Vênus (V)	0,72823	0,71834	0,00677
Terra (T)	1,01671	0,98329	0,01671
Marte (M)	1,66599	1,38133	0,09341
Júpiter (J)	5,45517	4,95156	0,04839
Saturno (S)	10,05351	9,02063	0,05413

Fonte: (Martins, 1998).

1 (UA) = equivale cerca de 149,6 milhões de quilômetros.

Agora com estes dados vamos calcular as áreas das elipses orbitais de cada planeta respectivamente:

A área total da orbita é dado por:

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2} r^2 \, d\theta$$

Sendo r a distância média para sol.

$\boldsymbol{A_{Mercurio}} =$

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}.(0,3871UA)^2\, d\theta$$

Com r = 0,3871 UA.

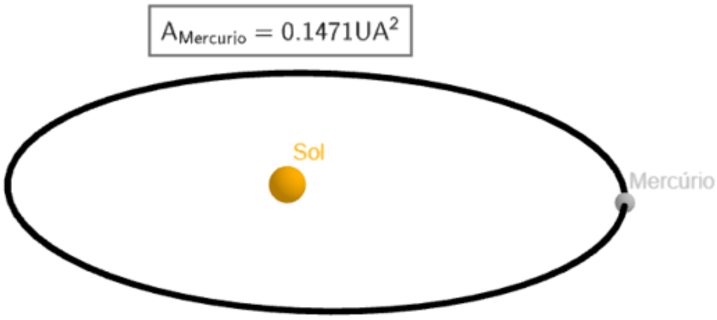
Integrando de 0 a 2π para cobrir um período completo da órbita de Mercúrio temos:

$$A_{Mercurio} = \frac{1}{2}.(0,3871UA)^2 \int_0^{2\pi} d\theta$$

$$A_{Mercurio} = \frac{1}{2}.(0,3871UA)^2 [\theta]_0^{2\pi}$$

$$A_{Mercurio} = \frac{1}{2}.(0,3871UA)^2.(2\pi - 0)$$

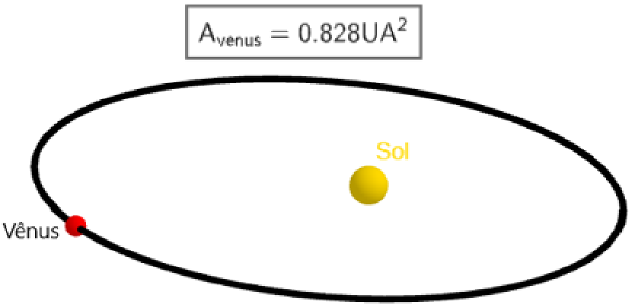
Figura 11- Representação da área de Mercúrio.



Fonte. Autor.

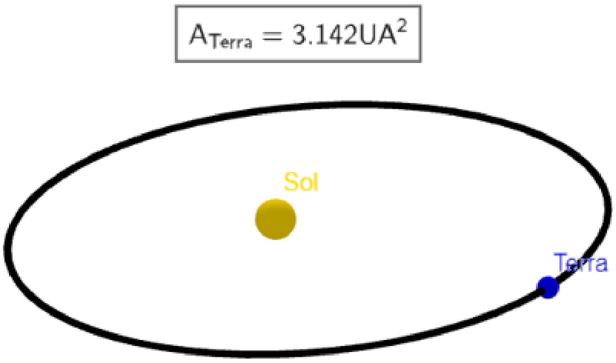
Realizando o mesmo procedimento com a utilização de seus respectivos parâmetros orbitais obteve-se as outras áreas mostradas abaixo:

Figura 12- Representação da área de Vênus.



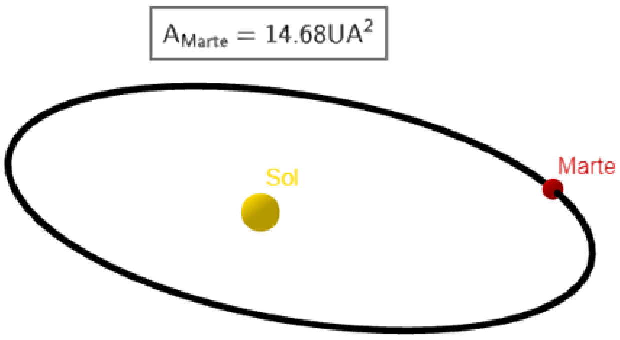
Fonte. Autor.

Figura 13- Representação da área de Terra.



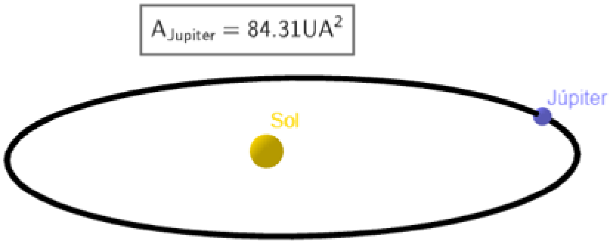
Fonte. Autor.

Figura 14- Representação da área de Marte.



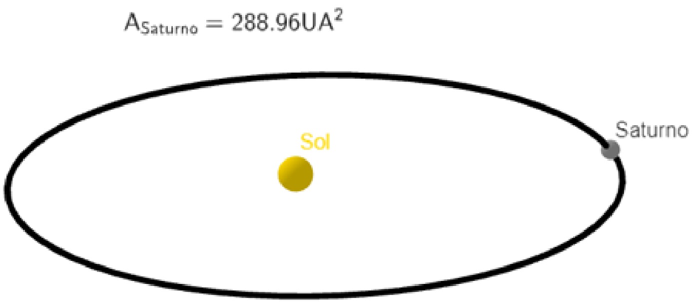
Fonte. Autor.

Figura 15- Representação da área de Júpiter.



Fonte. Autor.

Figura 16- Representação da área de Saturno.



Fonte. Autor.

Vale salientar que os valores encontrados como resultados das respectivas áreas são aproximados pois, as suas orbitas estão sempre em continuas mudanças.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta monografia é dirigida a leitores de nível superior em matemática, física e áreas afins cujo objetivo principal é aplicar o cálculo integral para determinar de forma precisa a área de órbitas elípticas. Se por ventura o leitor quiser se apropriar melhor deste assunto poderá consultar os autores: (Stewart, 2006; Flemming; Gonçalves, 2006; Guidorizzi, 1987; Pires, 2008; Ponczek, 2011; Saraiva; Souza, 2014; Martins, 1998).

Ao longo deste trabalho nota-se as contribuições astronômicas dos povos antigos para o entendimento do cosmos e a influência da matemática que ali estava fortemente presente que caracterizou essas civilizações como avançadas. O intuito foi facilitar a compreensão histórica das primeiras observações celestes e da importância para os desenvolvimentos científicos futuros.

Com isso, investigamos a aplicação do cálculo integral para determinar a área de órbitas elípticas o que nos possibilitou aplicar as regras e técnicas de integração paras as funções polinomiais, trigonométricas e exponenciais, o entendimento das coordenadas polares de uma elipse e também a compreensão do afélio e periélio em relação ao nosso sistema solar.

Logo, o cálculo da área de elipses orbitais através do cálculo integral é uma aplicação prática e relevante da matemática em contextos astronômicos e físicos, pelo qual é possível encontrar a área da órbita elíptica dos planetas e também podemos compreender a sua geometria.

Por fim, o cálculo integral é uma ferramenta essencial na análise e compreensão dos movimentos planetários em órbitas elípticas, portanto, esta ferramenta torna-se essencial para compreender coisas imensuráveis e vital para missões espaciais e posicionamento de satélites, bem como para evitar colisões entre objetos em órbita sendo sua implementação extremamente importante para pesquisas em astrofísica, engenharia aeroespacial e geodésia.

REFERÊNCIAS

BESERRA, Vagner de Sousa; Guimaraes, Diego Dias Machado. **Ambiente Multimídia para o ensino de seções cônicas** – Elipse. http://www.feg.unesp.br/~man04026/sceclipse/Artigo.pdf. Acesso em 18/10/2023.

DEMASIO, Felipe. **O início da revolução científica:** questões acerca de Copérnico e os epiciclos, Kepler e as órbitas elípticas. Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 33, n. 3, 3602 (2011). Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Santa Catarina, Araranguá, SC, Brasil- Recebido em 2/6/2010; Aceito em 22/5/2011; Publicado em 6/10/2011.

FLEMMING, Marília; GONÇALVES, Miriam. **Cálculo A**: Funções, limites, derivação e integração, revista e ampliada. 6ª-Ed. Pearson Education- Florianópolis, 2006.

GUIDORIZZI, H. Luiz. **Um curso de cálculo** - 2.ed.- Rio de Janeiro; São Paulo: LTC- Livros técnicos e científicos. Editora Ltda., 1987.

IEZZI, Gelson. **Fundamentos da Matemática Elementar**, vol. 7. São Paulo: Atual, 1993.

MOURÃO, Ronaldo. Copérnico: **Pioneiro da revolução astronômica**. 1ª ED. Odysseus, 2004.

PENTEADO, P. C. Martins. Física – **Conceitos e aplicações**, vol. 1. São Paulo: Moderna, 1998.

PIRES, Antônio. **Evolução das idéias da Física**. -São Paulo: Editora Livraria de Física, 2008.

ROCHA, José Fernando. **Origens e Evolução das ideias da Física**. –Salvador: EDUFBA, 2011.

STEWART, James. **Cálculo**- volume 1- 5. ed.- São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2006.

SARAIVA, Maria; SOUZA, Kepler. **Astronomia e Astrofísica**. Departamento de Astronomia - Instituto de Física, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 11 de fevereiro de 2014.

MARAN, Stephen P. **Astronomia para leigos**. Tradução: SAVONIK, Ricardo.- Rio de Janeiro: Alta Books, 2011.

TOSSATO, Claudemir Roque. "**Tycho Brahe e a precisão das observações astronômicas**", Intelligere, Revista de História Intelectual, nº13, pp. 92-112. 2022. Disponível em <http://revistas.usp.br/revistaintelligere>. Acesso em 20/10/2023.

TOSSATO, Claudemir; MARICONDA, Pablo. **O método da astronomia segundo Kepler**. Scientiae studia, São Paulo, v. 8, n. 3, p. 339-66, 2010.