



**INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
SERTÃO PERNAMBUCANO
Campus Salgueiro**

**INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO
SERTÃO PERNAMBUCANO
COORDENAÇÃO DO CURSO DE LICENCIATURA DE FÍSICA
CURSO DE LICENCIATURA DE FÍSICA**

CAMILA TORRES SILVA

**Trajetórias de partículas carregadas em um referencial
não-inercial na presença de defeitos topológicos e
submetidas a campo magnético**

Salgueiro

13 de fevereiro de 2023

CAMILA TORRES SILVA

TRAJETÓRIAS DE PARTÍCULAS CARREGADAS EM UM REFERENCIAL
NÃO-INERCIAL NA PRESENÇA DE DEFEITOS TOPOLÓGICOS E SUBMETIDAS A
CAMPO MAGNÉTICO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado a
Coordenação do curso de Licenciatura de Física do
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Sertão Pernambucano, campus Salgueiro,
como requisito parcial à obtenção do título de
Graduada em Licenciatura em Física. Orientador:
Prof. Me. Getúlio Eduardo Rodrigues de Paiva.

Salgueiro

13 de fevereiro de 2023

S586 Silva, Camila Torres.

Trajетórias de partículas carregadas em um referencial não-inercial na presença de defeitos topológicos e submetidas a campo magnético / Camila Torres Silva. - Salgueiro, 2023.

48 f.

Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Física) - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Sertão Pernambucano, Campus Salgueiro, 2023.

Orientação: Prof. Msc. Getúlio Eduardo Rodrigues de Paiva.

Coorientação: Dr. Júlio Eloísio Brandão da Silva.

1. Física. 2. eletromagnetismo. 3. defeito topológico. 4. referencial não-inercia. I. Título

CDD 530

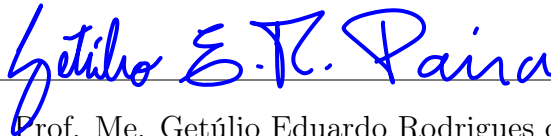
CAMILA TORRES SILVA

TRAJETÓRIAS DE PARTÍCULAS CARREGADAS EM UM REFERENCIAL NÃO-INERCIAL NA PRESENÇA DE DEFEITOS TOPOLÓGICOS E SUBMETIDAS A CAMPO MAGNÉTICO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado a
Coordenação do curso de Licenciatura de Física do
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia
do Sertão Pernambucano, campus Salgueiro,
como requisito parcial à obtenção do título de Li-
cenciada em Física.

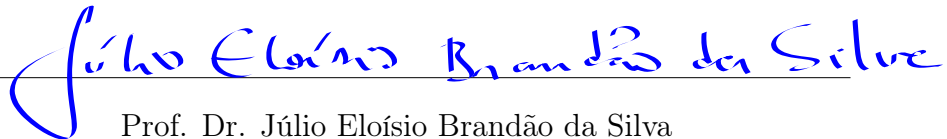
Aprovada em: 13/02/2023.

Banca Examinadora



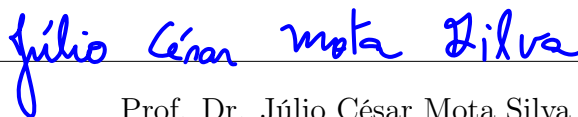
Prof. Me. Getúlio Eduardo Rodrigues de Paiva

Coordenação de Física - IFSertãoPE/CS



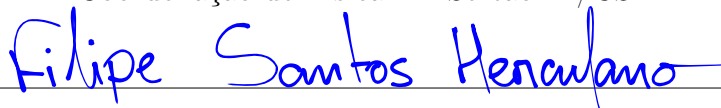
Prof. Dr. Júlio Eloísio Brandão da Silva

UFRB



Prof. Dr. Júlio César Mota Silva

Coordenação de Física - IFSertãoPE/CS



Prof. Filipe Santos Herculano

Escola Estadual de Aplicação Professora Vande de Souza Ferreira - UPE Petrolina

Salgueiro

13 de fevereiro de 2023

Dedico a meu filho Raphael e a meus pais, Carlos
e Delzuita.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus que me abençoou com esta oportunidade e me capacitou para percorrer este longo caminho.

Ao meu orientador Me. Getúlio Eduardo Rodrigues de Paiva, por suas contribuições para a realização da pesquisa.

Ao meu coorientador Dr. Júlio Eloísio Brandão da Silva, pelo esforço, os ensinamentos, a confiança e disponibilidade durante todo o desenvolvimento do trabalho.

À minha família por me apoiar durante todo este percurso.

Aos meus professores pelos ensinamentos e apoio durante todo o curso.

À Luzia Maria Rodrigues, psicóloga do Campus Salgueiro do IFSertãoPE, pelas orientações nos momentos difíceis no decorrer do curso.

Agradeço também aos meus amigos e colegas que participaram dessa caminhada.

Ao amigo Dr. José Wesley Lima Silva pelas contribuições para a realização deste trabalho.

Ao CNPQ pelo apoio financeiro.

Ao IFSertãoPE - Campus Salgueiro, que me proporcionou cursar a graduação de licenciatura em Física.

"Na vida, não existe nada a temer, mas a entender".

Marie Curie.

RESUMO

O eletromagnetismo é uma das áreas da física que consegue descrever diversos fenômenos observados em nosso cotidiano. O campo eletromagnético afeta diretamente o comportamento de uma partícula carregada que se movimenta em sua proximidade. Outro fator que pode influenciar no comportamento clássico e quântico de partículas, carregadas ou não, é a geometria. Um elemento relacionado a geometria e que tem sido bastante estudado em diversas áreas é o defeito topológico. As análises dessas condições que estão sendo estudadas podem ser feitas tanto em um referencial inercial, em que a lei da inércia é válida, quanto no não-inercial, caso em que o sistema de referência é acelerado ou está girando. Este trabalho tem como objetivo a realização de um estudo teórico, acerca do comportamento de partículas carregadas em um referencial girante, submetida a campo magnético uniforme e na geometria de defeitos topológicos.

O método para solução do problema deste trabalho é o formalismo lagrangiano, tendo-se n-equações diferenciais de segunda ordem, onde encontra-se uma equação de movimento que descreve a trajetória da partícula carregada nas condições abordadas. A equação obtida é solucionada numericamente, e como resultado obtem-se gráficos de trajetória para diversas configurações de campo, rotação e geometria. São apresentados nos apêndices o início da solução pelo formalismo hamiltoniano chegando a hamiltoniana do sistema estudado.

Palavras-chave: eletromagnetismo; defeito topológico; referencial não-inercial.

ABSTRACT

Electromagnetism is one of the areas of physics that can describe various phenomena less observed in our daily lives. The electromagnetic field directly affects the behavior of a charged particle moving in its proximity. Other factor that can influence the classical and quantum behavior of articles, charged or not, it's the geometry. An element related to geometry and that has been quite studied in several areas is the topological defect. The analyzes of these conditions that are being studied can be done both in an inertial frame of reference, in which the law of inertia is valid, as well as non-inertial, in which case the frame of reference is accelerated or is spinning. This work aims to carry out a theoretical study about the behavior of charged particles in a rotating reference frame, subjected to a field uniform magnetic field and the geometry of topological defects.

The method for solving the problem of this work is the Lagrangian formalism, having n-second-order differential equations, where one finds an equation of motion which describes the trajectory of the charged particle under the conditions addressed. The equation obtained is numerically solved, and as a result, trajectory graphs are obtained for various field, rotation and geometry settings. They are presented in the appendices the beginning of the solution by hamiltonian formalism reaching the hamiltonian of the system studied.

Keywords: electromagnetism; topological defect; non-inertial frame of reference.

Sumário

1	INTRODUÇÃO	11
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	13
2.1	Fenômenos com campo magnético	13
2.2	Formalismos	15
2.2.1	Formalismo lagrangiano	16
2.2.2	Formalismo hamiltoniano	19
2.3	Defeitos topológicos	21
2.4	Fenômenos não-inerciais (Rotação)	24
2.4.1	Força centrífuga	24
2.4.2	Força de Coriolis	26
3	RESULTADOS	29
3.1	Via formalismo lagrangiano	29
4	CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS	42
A	Resultados via formalismo hamiltoniano	47

List of Figures

1	Regra da mão direita	14
2	Processo de Volterra	23
3	Direção da força de Coriolis	27
4	cyclone-ingrid	27
5	Trajatória de uma partícula livre.	34
6	Trajatória com campo magnético constante no espaço euclidiano.	34
7	Trajatória com campo magnético uniforme $B = 1T$ e desclinação $\alpha = \frac{5}{6}$. . .	35
8	Trajatória com campo magnético uniforme $B = 1T$ e desclinação $\alpha = \frac{7}{6}$. . .	35
9	Trajatória com campo magnético uniforme $B = 1T$, desclinação $\alpha = 1$ e rotação $\Omega = 5Hz$	36
10	Trajatória com campo magnético uniforme $B = 1T$, desclinação $\alpha = 1$ e rotação $\Omega = 10Hz$	36
11	Trajatória com campo magnético uniforme $B = 1T$, desclinação $\alpha = \frac{5}{6}$ e rotação $\Omega = 1Hz$	37
12	Trajatória com campo magnético uniforme $B = 1T$, desclinação $\alpha = \frac{7}{6}$ e rotação $\Omega = 1Hz$	37
13	Trajatória com campo magnético uniforme $B = 1T$, desclinação $\alpha = \frac{5}{6}$ e rotação $\Omega = 2Hz$	37
14	Trajatória com campo magnético uniforme $B = 1T$, desclinação $\alpha = \frac{7}{6}$ e rotação $\Omega = 2Hz$	37
15	Trajatória com campo magnético uniforme $B = 1T$, desclinação $\alpha = \frac{5}{6}$ e rotação $\Omega = 2Hz$ com um tempo $t = 10\pi s$	38
16	Trajatória com campo magnético uniforme $B = 1T$, desclinação $\alpha = \frac{5}{6}$ e rotação $\Omega = 2Hz$ com um tempo $t = 50\pi s$	38
17	Trajatória com campo magnético uniforme $B = 1T$, desclinação $\alpha = \frac{5}{6}$ e rotação $\Omega = 5Hz$ com um tempo $t = 10\pi s$	39
18	Trajatória com campo magnético uniforme $B = 1T$, desclinação $\alpha = \frac{5}{6}$ e rotação $\Omega = 5Hz$ com um tempo $t = 100\pi s$	39
19	Trajatória com campo magnético uniforme $B = 1T$, desclinação $\alpha = \frac{5}{6}$ e rotação $\Omega = 10Hz$ com um tempo $t = 100\pi s$	40

20	Trajectoria com campo magnetico uniforme $B = 1T$, desclinação $\alpha = \frac{7}{6}$ e rotação $\Omega = 2Hz$ com um tempo $t = 50\pi s$	40
21	Trajectoria com campo magnetico uniforme $B = 1T$, desclinação $\alpha = \frac{7}{6}$ e rotação $\Omega = 5Hz$ com um tempo $t = 10\pi s$	40
22	Trajectoria com campo magnetico uniforme $B = 1T$, desclinação $\alpha = \frac{7}{6}$ e rotação $\Omega = 5Hz$ com um tempo $t = 50\pi s$	40
23	Trajectoria com campo magnetico uniforme $B = 1T$, desclinação $\alpha = \frac{7}{6}$ e rotação $\Omega = 10Hz$ com um tempo $t = 10\pi s$	41
24	Trajectoria com campo magnetico uniforme $B = 1T$, desclinação $\alpha = \frac{7}{6}$ e rotação $\Omega = 10Hz$ com um tempo $t = 50\pi s$	41

1 INTRODUÇÃO

A física de referenciais não-inerciais é uma generalização das leis de Newton para quaisquer referenciais. É o sistema de axiomas gerais para clássicos e mecânica quântica [1]. Um referencial que encontra-se girando é um referencial não-inercial e neste caso o movimento de rotação dá origem a uma força chamada força centrífuga. A direção da força centrífuga é perpendicular à curva no ponto em que o corpo se encontra e seu sentido é sempre se distanciando centro da circunferência. Se um corpo é colocado em movimento no referencial que está girando tem-se, além da força centrífuga agindo sobre este corpo, também a ação da força de Coriolis [2].

O estudo de referenciais não-inerciais possui uma ampla abrangência, pode-se citar no estudo da escala quântica o emaranhamento quântico em referenciais não inerciais que foi estudado para campos escalares e de Dirac, tem-se ainda Spintrônica e o espectro relativístico de corpo negro. É possível ainda encontrar pesquisas da mecânica clássica como em força de Coriolis e trajetórias não inerciais de um planeta com rotação rápida [3, 4, 5, 6, 7].

Para investigar o comportamento de partículas em referenciais girantes, portanto não-inerciais, as leis de Newton não são válidas em sua forma padrão, para isso é possível utilizar os formalismos lagrangiano e hamiltoniano e encontrar as equações de movimento do sistema e realizar tal investigação.

Outro elemento que pode afetar a mecânica clássica de uma partícula carregada é o magnetismo. O eletromagnetismo é uma das diversas e importantes áreas da física com papel fundamental no desenvolvimento tecnológico da humanidade [8]. Tem aplicações nos mais variados equipamentos e é capaz de descrever diversos fenômenos do nosso cotidiano, sendo um dos responsáveis por parte dos avanços tecnológicos ao longo da história. Pode-se citar alguns objetos que utilizam o magnetismo e que são observados no dia-a-dia, entre eles a televisão [8], alto falantes, smartphones, computadores e motores elétricos.

Na agricultura há o estudo da utilização do campo magnético estático de baixa intensidade e superbaixa frequência para aumentar a germinação e crescimento de soja. Há ainda trabalhos sobre magnetismo de nanopartículas e magnetismo do futuro, onde são discutidas sete eras na história do magnetismo desde os tempos antigos até o século XX [9, 10, 11].

Além da força magnética e da rotação, outro fator que pode influenciar no comportamento de partículas é a geometria. Um dos diversos elementos relacionados a geometria são os defeitos topológicos [8].

Os defeitos topológicos são exemplos importantes porque eles podem aparecer nas mais diversas áreas da física. Eles surgem na maioria das teorias unificadas de interações fortes, fracas e eletromagnéticas [12]. Eles são soluções locais de algumas teorias de campo e com isso podem ser tanto um defeito na própria textura do espaço-tempo quanto uma falha estrutural num cristal. São soluções das equações de movimento para os campos e surgem em modelos que suportam quebra espontânea de simetria [13].

Defeito topológico é abordado em diversas áreas de estudo, como ponto quântico, cristais líquidos nemáticos, grafeno bicamada e topografias congeladas. Em níveis de Landau são estudados analisando o comportamento de elétrons que se movem em um campo magnético na presença de uma distribuição contínua de disclinações, um deslocamento parafuso magnético e uma dissipação. Neste caso além do defeito topológico, também é abordado no estudo citado a parte eletromagnética [14, 15, 16, 17, 18].

Este trabalho tem como objetivo investigar de que forma defeitos topológicos, campo magnético e rotação podem afetar a dinâmica clássica de uma partícula carregada. Esse estudo clássico abordará diferentes elementos ao mesmo tempo, permitindo futuramente, que os resultados obtidos sejam confrontados a outros alcançados mediante uma abordagem quântica [19].

Tendo como base esta discussão, inicialmente este trabalho apresentará, no capítulo 2, a fundamentação teórica dividida em: fenômenos com campo magnético, formalismos, defeitos topológicos e fenômenos não-inerciais (rotação). No capítulo 3 apresentam-se os resultados obtidos. No capítulo 4 Conclusões e perspectivas.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1 Fenômenos com campo magnético

O eletromagnetismo tem papel fundamental no desenvolvimento tecnológico da humanidade, sendo capaz de descrever diversos fenômenos do cotidiano e também é um dos responsáveis por parte dos avanços tecnológicos ao longo da história [8]. Uma das invenções que pode ser citada, e que é muito observada no dia-a-dia, é a televisão. Foi inventada à base de um tubo que tinha numa das extremidades um cátodo, eletrodo no qual há ganho de elétrons que partiam em feixes. Esses elétrons seguiam na direção da outra ponta do tubo, ânodo, eletrodo onde ocorre perda de elétrons, e eram controlados por campos magnéticos gerados por bobinas [8].

Sabendo da notoriedade do eletromagnetismo, é importante entender como um campo magnético é formado, isso pode acontecer de duas maneiras: uma delas consiste em utilizar partículas eletricamente carregadas e em movimento, produzindo assim um eletroímã. A corrente gerada produz um campo magnético; Outra maneira de se formar um campo magnético se baseia no fato de as partículas elementares, como o elétron, possuírem um campo magnético intrínseco. Porém na maioria dos materiais, os campos magnéticos dos elétrons se cancelam e o campo em torno do material é nulo [20].

Com essas informações pode-se definir a força magnética, que é escrita na forma da equação vetorial

$$\vec{F}_B = e\vec{v} \times \vec{B}, \quad (1)$$

onde \vec{F}_B é a força magnética, e é a carga que deverá estar em movimento, caso contrário não existirá força magnética atuante, \vec{v} é a velocidade e \vec{B} o campo magnético. Seu módulo é dado pela seguinte expressão

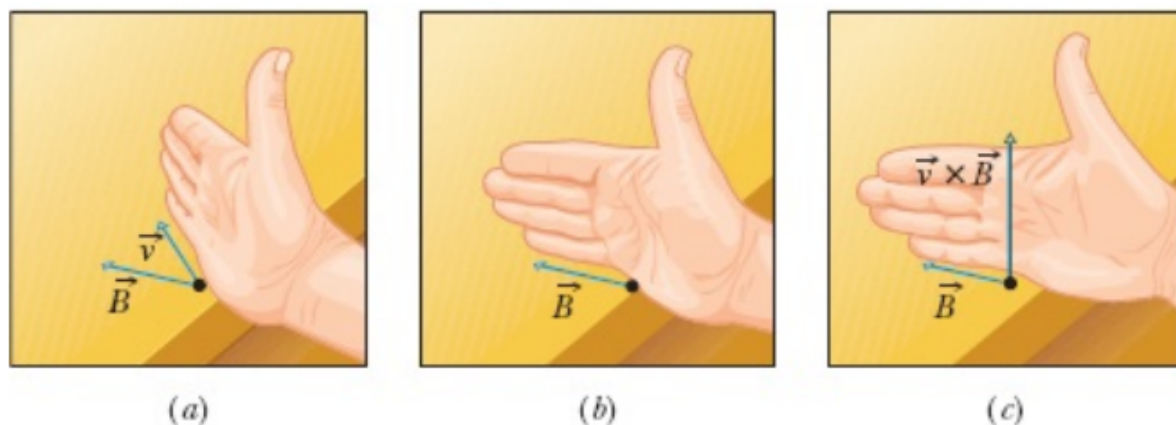
$$F_B = |e|vB\sin\theta, \quad (2)$$

onde θ é o ângulo entre \vec{v} e \vec{B} .

A direção desta força é dada pela regra da mão direita conforme pode-se observar na figura 1.

Após a definição da força magnética, a partir da equação 2, sendo o $\sin\theta$ igual a

Figure 1: Regra da mão direita



Fonte: Halliday, 2012.

Fig. 1: Como observa-se nas imagens *a* e *b* os dedos indicador, médio, anelar e mindinho representam a direção do campo magnético \vec{B} e da velocidade da carga \vec{v} , respectivamente, o dedo polegar, na imagem *c*, indica a direção da força magnética resultado do produto vetorial $\vec{v} \times \vec{B}$.

um, que ocorre quando os vetores \vec{v} e \vec{B} são ortogonais entre si, pode-se definir o campo magnético \vec{B} como sendo

$$B = \frac{F_B}{|e|v}, \quad (3)$$

em que $|e|$ é o módulo da carga da partícula [20].

A partir do momento em que sabe-se como um campo magnético é formado e as definições da força e do campo magnético, passa-se agora ao estudo da interação eletromagnética no qual é dada pela força de Lorentz que é a força que uma carga sofre ao entrar em movimento numa região com campo elétrico e magnético, que é escrita como

$$m\ddot{\vec{r}} = e(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}), \quad (4)$$

onde $e(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$ é que representa a força \vec{F} que age sobre a partícula, conhecida como força de Lorentz [2]. É possível observar nesta equação que quanto maiores forem a velocidade ou o próprio campo magnético no sistema maior será o termo magnético que influencia a força de Lorentz.

Como é possível observar os elementos eletromagnéticos da força de Lorentz são descritos pelo campo elétrico \vec{E} e pelo campo magnético \vec{B} , porém a partir de agora estes termos passaram a ser representados pelos potenciais escalar e vetor, respectivamente. As

relações entre os campos e os potenciais são dados pelas equações

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}, \quad (5)$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad (6)$$

onde \vec{A} é chamado potencial vetor está relacionado ao campo magnético ao qual a partícula está sendo submetida e \vec{E} nos dá o campo elétrico para o potencial coulombiano no caso estático [21] e [22].

Tendo em mente como um campo magnético é formado é também necessário estudar como ele pode influenciar no comportamento de uma partícula carregada que se movimenta em suas imediações. O que ocorre é que ao se mover na presença de um campo magnético uniforme tal partícula passa a ter seu movimento afetado pela força magnética. Independente do percurso que a partícula esteja realizando, a força do campo fará com que ela passe a mudar a direção de seu movimento passando, a partir de então, a ter um deslocamento circular e a se manter confinada nessa nova trajetória rotacional.

Como já foi dito, o campo magnético age de forma tal que faz com que a partícula carregada em movimento passe a ter um deslocamento circular, essa movimentação rotacional tem uma frequência angular ω que não depende da velocidade \vec{v} da partícula, sendo dada pela seguinte equação

$$\omega = \frac{eB}{m}, \quad (7)$$

onde ω é a "frequência ciclotron" que é o número de revoluções que a partícula dará em determinado espaço de tempo [23]. Quanto maior a intensidade do campo magnético, maior será sua frequência angular.

2.2 Formalismos

Este estudo trabalha com partículas que se movimentam em um referencial não-inercial, além da presença do campo magnético e do defeito topológico.

Por se tratar de movimento em referencial não-inercial torna-se mais difícil trabalhar com as leis de Newton por utilizar muitos vetores, além também da geometria de defeitos topológicos, desse modo são utilizados os formalismos lagrangiano e hamiltoniano para

solucionar o problema proposto apresentando na sequência, de forma breve, cada um individualmente.

2.2.1 Formalismo lagrangiano

O caminho percorrido por uma partícula em um sistema mecânico é dado pela segunda lei de Newton. Sabe-se que para trabalhar com tal lei utilizam-se muitos vetores e neste caso a mudança de coordenadas torna-se muito complicada de ser realizada. Neste sentido utilizar o formalismo lagrangiano torna-se um facilitador, visto que labora com termos escalares.

No formalismo lagrangiano temos uma integral, chamada integral de ação, que determina a evolução do sistema mecânico a ser estudado, conhecido como Princípio de Hamilton que diz "O caminho real que uma partícula percorre entre dois pontos 1 e 2 em um dado intervalo de tempo t_1 a t_2 , é tal que a integral de ação é estacionária, quando considerada ao longo do caminho real" [2], que é dada por

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0. \quad (8)$$

O integrando L da integral da ação é chamado de Lagrangiano e depende das n coordenadas generalizadas, de suas derivadas e do tempo

$$L = L(q_1, \dot{q}_1, \dots, q_n, \dot{q}_n, t), \quad (9)$$

onde t é a variável independente, portanto as derivadas das coordenadas q_i são derivadas temporais sendo denotadas com pontos sobre elas como \dot{q}_i .

A função lagrangiana é expressa na forma

$$L = T - U, \quad (10)$$

onde T é a energia cinética e U a energia potencial do sistema.

Pode-se expressá-la com n variáveis independentes, as quais são denotadas com coordenadas generalizadas q_1, q_2, \dots, q_n . Dessa forma, o vetor representante da posição de cada partícula é determinado unicamente em cada instante. A partir destas informações podemos escrever as equações de movimento na forma

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial L}{\partial q_k}, \quad (11)$$

onde $k = 1, \dots, n$, chamada equação de Euler-Lagrange. Nas equações de Lagrange tem-se n equações de segunda ordem onde no lugar de forças e acelerações vetoriais, características do formalismo newtoniano, são utilizadas as duas funções escalares T e U , simplificando assim o tratamento de diversos problemas mecânicos [24].

Com a breve apresentação do formalismo lagrangiano, até aqui, pode-se descrever e analisar diversos sistemas, entre eles e que faz parte deste trabalho está a lagrangiana para uma partícula carregada em um campo magnético. Considerando a equação 4 para uma partícula carregada em um campo magnético na forma em que a segunda lei de Newton nos demonstra, onde, conforme viu-se $e(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$ é que representa a força \vec{F} que age sobre a partícula, conhecida como força de Lorentz.

Para de fato expressarmos a equação anterior na forma de lagrangiana precisamos fazer algumas substituições, portanto utilizaremos as relações entre (campo x potencial magnético) e (campo x potencial elétrico) expressas nas equações 5 e 6.

Após realizadas as substituições de 5 e 6 na 4 chega-se a seguinte equação resultante

$$m\ddot{\vec{r}} = e \left[-\vec{\nabla}\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \right]. \quad (12)$$

A partir de agora pretende-se mostrar que a força \vec{F} pode ser representada na forma de uma função de potenciais generalizados

$$Q_k = -\frac{\partial U}{\partial q_k} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_k} \right), \quad (13)$$

pois a força magnética depende também da velocidade, onde Q_k é a força generalizada [24]. Com esta função busca-se encontrar um potencial generalizado U que integre a lagrangiana ($L = T - U$) o qual represente o sistema buscado, porém, nesta equação aparece uma derivada total em relação ao tempo, já na equação 12 a derivada é parcial. Para solucionar este impasse pode-se introduzir a derivada total do potencial vetor em 12

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial z} \dot{z} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{A} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad (14)$$

que terá como resultado

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \frac{d\vec{A}}{dt} - (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{A}. \quad (15)$$

Será usado ainda a identidade vetorial [24]

$$\vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{v} \cdot \vec{A}) - (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} \quad (16)$$

Realizando as substituições em 12, tem-se

$$m\ddot{\vec{r}} = e \left\{ -\vec{\nabla}\varphi - \left(\frac{d\vec{A}}{dt} - (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} \right) + [\vec{\nabla}(\vec{v} \cdot \vec{A}) - (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A}] \right\}, \quad (17)$$

que fica reduzida a

$$m\ddot{\vec{r}} = e \left[-\vec{\nabla}\varphi - \frac{d\vec{A}}{dt} + \vec{\nabla}(\vec{v} \cdot \vec{A}) \right], \quad (18)$$

podendo ser reescrita como

$$m\ddot{\vec{r}} = e \{ -\vec{\nabla}[\varphi - (\vec{v} \cdot \vec{A})] \} - e \frac{d\vec{A}}{dt}. \quad (19)$$

O potencial vetor \vec{A} e o potencial escalar φ não dependem da velocidade, de modo que a equação da força de Lorentz ficará da seguinte forma

$$m\ddot{\vec{r}} = -\vec{\nabla}(e\varphi - e\vec{v} \cdot \vec{A}) + \frac{d}{dt}[\vec{\nabla}_v(e\varphi - e\vec{v} \cdot \vec{A})], \quad (20)$$

onde $\vec{\nabla}_v = \vec{e}_i \frac{\partial}{\partial q_i}$. Realizando a comparação com a equação 13 observa-se que é exatamente a forma que se buscava para encontrar o potencial generalizado U , sendo este

$$U = e\varphi - e\vec{v} \cdot \vec{A}, \quad (21)$$

de modo que chega-se a lagrangiana

$$L = \frac{1}{2}mv^2 - e\varphi + e\vec{A}\vec{v}, \quad (22)$$

que é a lagrangiana para partículas carregadas submetidas a campo eletromagnético [24].

2.2.2 Formalismo hamiltoniano

O Hamiltoniano é um formalismo próximo do Lagrangiano, visto que surgiu de forma natural a partir dele [2]. Para não ser esquecido a equação de Euler-Lagrange é dada por 11 e dela podemos definir o momento canônico conjugado

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}. \quad (23)$$

Neste formalismo o papel central da Lagrangiana é sobreposto pela função Hamiltoniana, para isso ocorre uma mudança nas variáveis (q, \dot{q}, t) para (q, p, t) . Essa mudança resulta em uma nova base que define o espaço de fase, onde agora tem-se $2n$ equações de primeira ordem. Com isso pode se definir a função de Hamilton ou hamiltoniana [24].

$$H(q, p, t) = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - L(q, \dot{q}, t), \quad (24)$$

a velocidade \dot{q}_i desta equação deve ser expressa em termos de (q, p, t) . Com a introdução da função H podemos reescrever na forma

$$dH = \sum_{i=1}^n (\dot{q}_i dp_i + p_i d\dot{q}_i) - \left[\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i \right) + \frac{\partial L}{\partial t} dt \right]. \quad (25)$$

Como já havia sido definido o momento canônico conjugado na equação 23, a equação anterior fica reduzida a

$$dH = \sum_{i=1}^n (\dot{q}_i dp_i - \dot{p}_i dq_i) - \frac{\partial L}{\partial t} dt, \quad (26)$$

Da equação de Euler-Lagrange, tem-se

$$\frac{dp_i}{dt} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad (27)$$

portanto, temos que

$$dH = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i \right) + \frac{\partial H}{\partial t} dt. \quad (28)$$

Da comparação da equação 26 com a 28 tem-se as equações de Hamilton ou equações canônicas de Hamilton, que são

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad (29)$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad (30)$$

$$-\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}, \quad (31)$$

com $i = 1, \dots, n$. As equações 29 e 30 formam um conjunto de $2n$ equações diferenciais de primeira ordem que são equivalentes ao sistema de n equações de segunda ordem de Lagrange. Já a equação 31 não é uma equação de movimento, mas se trata de uma relação de grande importância das dependências temporais explícitas entre a lagrangiana e a hamiltoniana. [24].

Diferente da lagrangiana que calculamos na subseção anterior, que é a diferença entre a energia cinética e energia potencial do sistema, a hamiltoniana, em grande parte dos casos, pode ser obtida através do cálculo da soma das energias cinética e potencial do mesmo sistema, por exemplo, portanto tem-se

$$H = T + U \quad (32)$$

que é igual a energia total do sistema, expressa como função das coordenadas e momentos [24].

Após a breve apresentação do formalismo hamiltoniano, pode-se agora demonstrar a hamiltoniana para uma partícula carregada que se movimenta num campo eletromagnético.

A lagrangiana descrita em 22, pode ser reescrita da seguinte forma

$$L = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 - e(\varphi - \dot{\vec{r}} \cdot \vec{A}). \quad (33)$$

Tem como momento generalizado

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}} = m\dot{\vec{r}} + e\vec{A}, \quad (34)$$

portanto

$$\dot{\vec{r}} = \frac{\vec{p} - e\vec{A}}{m}. \quad (35)$$

Na hamiltoniana para este sistema tem-se a equação

$$H = \vec{p} \cdot \dot{\vec{r}} - L = \vec{p} \cdot \dot{\vec{r}} - \left[\frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 - e(\varphi - \dot{\vec{r}} \cdot \vec{A}) \right], \quad (36)$$

Substituindo 35 na equação anterior chega-se a

$$H = \vec{p} \cdot \frac{\vec{p} - e\vec{A}}{m} - \left[\frac{1}{2} m \left(\frac{\vec{p} - e\vec{A}}{m} \right)^2 - e \left(\varphi - \frac{\vec{p} - e\vec{A}}{m} \cdot \vec{A} \right) \right], \quad (37)$$

a partir daqui calcula-se

$$H = \vec{p} \cdot \left(\frac{\vec{p} - e\vec{A}}{m} \right) - \left(\frac{\vec{p} - e\vec{A}}{m} \right) \cdot e\vec{A} - \frac{1}{2m} (\vec{p} - e\vec{A})^2 + e\varphi,$$

colocando $\left(\frac{\vec{p} - e\vec{A}}{m} \right)$ em evidência, tem-se

$$\left(\frac{\vec{p} - e\vec{A}}{m} \right) (\vec{p} - e\vec{A}) - \frac{1}{2m} (\vec{p} - e\vec{A})^2 + e\varphi,$$

logo,

$$\frac{(\vec{p} - e\vec{A})^2}{m} - \frac{1}{2} \frac{(\vec{p} - e\vec{A})^2}{m} + e\varphi,$$

que resultam em

$$H = \frac{1}{2m} (\vec{p} - e\vec{A})^2 + e\varphi, \quad (41)$$

que é a hamiltoniana para uma partícula num campo eletromagnético externo. É importante destacar que esta hamiltoniana é a energia total $T+U$ se φ e \vec{A} não dependem explicitamente do tempo [24].

2.3 Defeitos topológicos

Muitos sólidos possuem estrutura cristalina, sendo por vezes descrito como um arranjo perfeito que são formados por repetição infinita e periódica de grupos idênticos de átomos [25]. Tal estrutura obedece a operações de simetria, entre elas temos a rotação e a translação, que consistem em movimentar o arranjo de forma que seu posicionamento

final seja exatamente igual ao obtido inicialmente, portanto a configuração geométrica é equivalente a observada antes da aplicação das operações. Se esse defeito for impossível de ser retirado do meio (estrutura cristalina) de forma que sua configuração não retorne a ser a mesma da inicial, então chamamos esse defeito de topológico [8], [26].

Cristais encontrados na natureza não são perfeitos, portanto apresentam falhas em sua estrutura, diferentemente de cristais criados em laboratórios que muitas vezes são perfeitos, chamados ideais. Consegue-se aplicar defeitos topológicos tanto nos cristais ideais como nos imperfeitos achados na natureza, e em diversos meios. Neste trabalho o defeito topológico atribuído ao sistema que foi estudado é a desclinação.

A desclinação é um dos defeitos topológicos mais importantes, estando relacionada a quebra de simetria rotacional de um meio. A métrica que descreve o meio na presença de uma desclinação dado em coordenadas cilíndricas é [8], [26].

$$ds^2 = dz^2 + dr^2 + \alpha^2 r^2 d\theta^2, \quad (42)$$

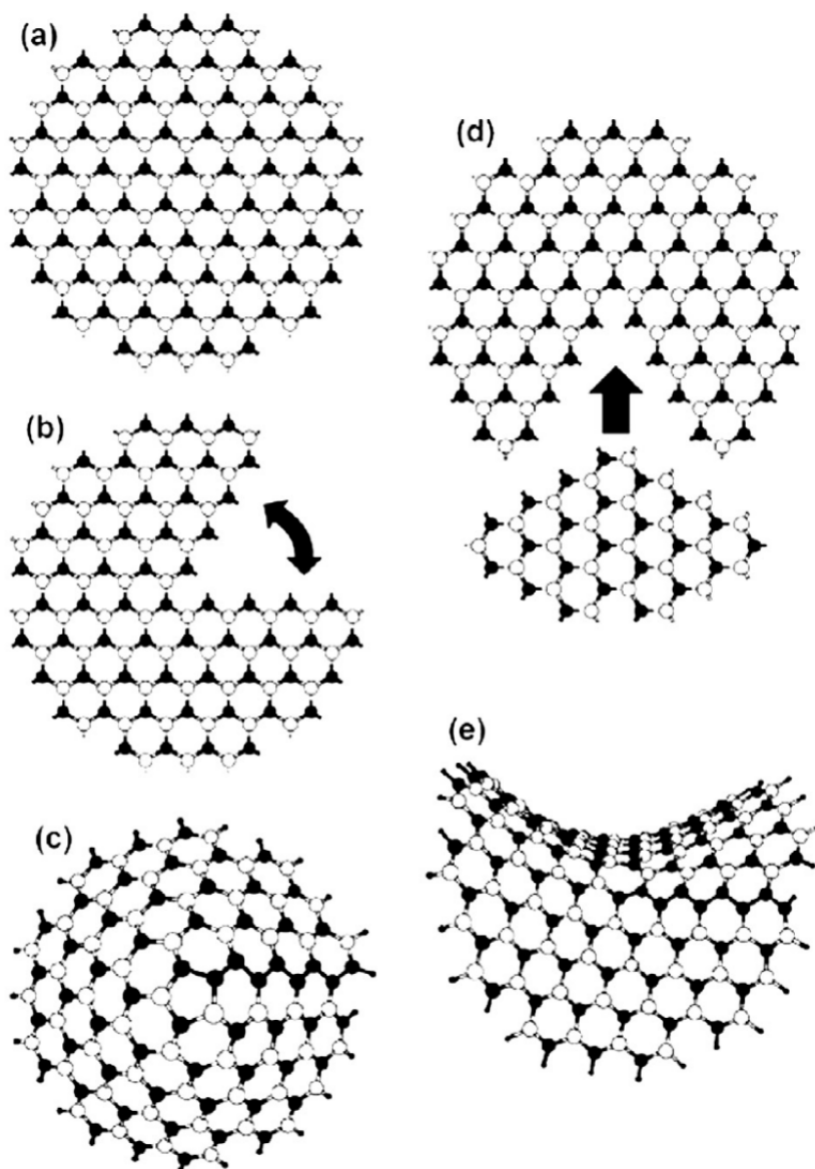
onde α é quem irá indicar a influência do defeito topológico, r é a coordenada radial, θ a coordenada angular e z é a coordenada perpendicular do plano definido por (r, θ) .

É possível imaginarmos como uma desclinação pode ser gerada com o auxílio do conhecido processo de Volterra (recorta e cola). Trata-se, por exemplo, de se pegar uma folha de papel A4 recortar um pedaço e unirmos as duas pontas soltas que sobraram resultando em aproximadamente um cone [19], o mesmo pode ser feito recortando e adicionando outro pedaço de papel ao A4 inicial, o que resultaria em uma "cela de cavalo" (importante ressaltar que esta é uma forma lúdica de se visualizar como é gerado um defeito topológico, visto que na realidade não é assim que ocorre). Na figura 2 é possível visualizar como funciona o processo de Volterra utilizando uma camada plana de boro e nitrogênio [27].

O ângulo diedral λ é correspondente ao ângulo do pedaço inserido ou retirado e indica o quão curvo o meio desclinado se encontra. Este ângulo λ relaciona-se com α , que é o parâmetro que indica a influência do defeito, através da seguinte equação

$$\lambda = 2\pi(\alpha - 1) \quad (43)$$

Figure 2: Processo de Volterra



Fonte: Azevedo, 2008.

Fig. 2: (a) Uma camada plana de boro e nitrogênio, (b) e (c) Desclinação positiva $0 < \alpha < 1$: retira-se uma cunha da camada de boro e nitrogênio e depois junta-se as moléculas que foram rompidas, (d) e (e) desclinação negativa $\alpha > 1$: é inserido uma cunha no meio a mais na camada plana.

portanto, para dar-se uma volta completa em torno do eixo principal do meio não seria necessário 2π mas sim $2\pi\alpha$ [8].

Neste trabalho busca-se escrever uma lagrangiana que represente um sistema cujo um dos termos presentes é a simetria dos defeitos topológicos, dessa forma torna-se conveniente escrever a lagrangiana 22 da seguinte forma

$$L = \frac{m}{2} g_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j - e\varphi + e\dot{q}_i \vec{A}_i, \quad (44)$$

pois está se trabalhando com uma geometria de simetria diferenciada, que em nosso sistema é a desclinação.

2.4 Fenômenos não-inerciais (Rotação)

Neste trabalho o referencial no qual as partículas carregadas se movimentam está girando, portanto, é não-inercial, dessa forma é importante saber diferenciar um referencial inercial e um não-inercial. Um referencial inercial R é aquele para qual a lei da inércia é válida. Neste sistema de referência, na ausência de forças, corpos livres não sofrem aceleração, mantendo-se em repouso ou movimento retilíneo uniforme. Se considerarmos um referencial R' que está acelerando relativo a R , então o corpo será visto, de R' , como acelerando em seu sentido oposto e, neste caso, a primeira lei de Newton não é válida. R' é então considerado um referencial não inercial [28]. Entre os fenômenos não-inerciais que podemos estudar dentro do movimento de rotação estão a força centrífuga e a força de Coriolis.

2.4.1 Força centrífuga

A força centrífuga é um fenômeno facilmente encontrado em nosso cotidiano, em uma máquina de lavar roupas com função centrífuga, por exemplo, as roupas antes molhadas saem quase secas. Ela tem direção sempre radial ao movimento no qual a roupa está realizando no momento em que está girando na máquina, fazendo assim com que a água seja "expulsa" das roupas deixando-as quase secas.

A partir da segunda lei de Newton é possível chegarmos a uma expressão matemática que descreva a força centrífuga. Consideremos uma partícula de massa m na posição \vec{r} , estando no referencial inercial S_0 , a equação será

$$m \left(\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \right)_{S_0} = \vec{F} \quad (45)$$

onde \vec{F} é a força resultante sobre a partícula.

Será utilizada na resolução para o referencial em rotação a seguinte identidade

$$\left(\frac{d\vec{Q}}{dt} \right)_{S_0} = \left(\frac{d\vec{Q}}{dt} \right)_S + \vec{\Omega} \times \vec{Q} \quad (46)$$

esta é uma importante identidade que relaciona a derivada de qualquer vetor \vec{Q} quando este é medido em um referencial inercial S_0 à derivada correspondente no referencial S em rotação. O termo $\vec{\Omega} \times \vec{Q}$ representa uma correção na mudança entre os referenciais S_0 e S , sua ausência indicaria que as duas derivadas seriam iguais nos dois referenciais [2].

Utilizando agora a equação 46 pode-se expressar a derivada em termos das derivadas calculadas no referencial em rotação S , dessa forma

$$\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{S_0} = \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_S + \vec{\Omega} \times \vec{r} \quad (47)$$

derivando pela segunda vez tem-se

$$\left(\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right)_{S_0} = \left(\frac{d}{dt}\right)_{S_0} \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{S_0}$$

logo

$$\left(\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right)_{S_0} = \left(\frac{d}{dt}\right)_{S_0} \left[\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_S + \vec{\Omega} \times \vec{r} \right] \quad (49)$$

Aplicando a equação 46 ao termo que está fora dos colchetes, no termo à direita, ficamos então com

$$\left(\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right)_{S_0} = \left(\frac{d}{dt}\right)_S \left[\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_S + \vec{\Omega} \times \vec{r} \right] + \vec{\Omega} \times \left[\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_S + \vec{\Omega} \times \vec{r} \right] \quad (50)$$

Podemos agora reescrever esta derivada de uma forma um pouco mais simples, sendo

$$\left(\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right)_{S_0} = \ddot{\vec{r}} + 2\vec{\Omega} \times \dot{\vec{r}} + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) \quad (51)$$

onde os pontos do lado direito da equação correspondem a derivadas calculadas com respeito ao referencial em rotação S .

Substituindo a equação 51 na 45, ficamos com a equação final

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} + 2m\dot{\vec{r}} \times \vec{\Omega} + m(\vec{\Omega} \times \vec{r}) \times \vec{\Omega} \quad (52)$$

Com isso é possível retirar desta última equação o termo que descreve a força centrífuga [2].

$$\vec{F}_{cf} = m(\vec{\Omega} \times \vec{r}) \times \vec{\Omega} \quad (53)$$

o produto vetorial $\vec{\Omega} \times \vec{r}$ resulta em um vetor perpendicular aos respectivos vetores, somente esta parcela da equação faria com que a partícula tivesse uma trajetória tangencial ao movimento rotacional, mas ainda tem-se um novo produto vetorial com Ω que tem por consequência um novo vetor ortogonal ao primeiro calculado, sendo este com direção final apontando radialmente para fora a partir do eixo de rotação, descrevendo desta forma a força centrífuga do sistema estudado [2].

2.4.2 Força de Coriolis

Além da força centrífuga há uma outra força que age em um referencial que está rotacionando, a força de Coriolis. Importante destacar que esta força só irá atuar no sistema se além do referencial que está girando a partícula também estiver se movimentando nele, sem esse movimento da partícula não há ação da força de Coriolis.

Da equação 52 que foi deduzida da lei de Newton podemos retirar o termo que descreve a força de Coriolis

$$\vec{F}_{cor} = 2m\dot{\vec{r}} \times \vec{\Omega} = 2m\vec{v} \times \vec{\Omega} \quad (54)$$

onde v é a velocidade relativa ao referencial que está em rotação. A intensidade desta força depende da magnitude de \vec{v} e $\vec{\Omega}$ assim como de suas orientações relativas.

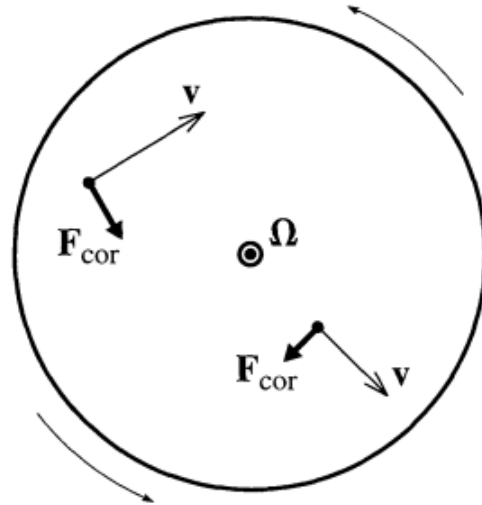
De maneira análoga à força magnética que forma um ângulo de noventa graus ao produto vetorial $e\vec{v} \times \vec{B}$ a força de Coriolis é sempre perpendicular a velocidade do corpo que está se movendo e sua direção também é dada pela regra da mão direita [2].

É possível observar os efeitos e saber a direção da força de Coriolis na natureza. No hemisfério norte tem-se que o seu sentido é para direita do movimento da partícula, já no hemisfério sul também é possível notar esse fenômeno, neste caso observa-se que o módulo da força é o mesmo porém está direcionada para o lado esquerdo do movimento da partícula. Desta forma, dependendo da direção para qual a partícula está se movendo e se o hemisfério no qual ela se encontra está girando no sentido horário ou anti-horário, a força de Coriolis atua curvando sua trajetória para o lado direito ou esquerdo.

Observe na figura 3 como ocorre a mudança da direção da partícula que é afetada pela força de Coriolis.

Na figura 4 é possível observar um dos efeitos diretos da força de Coriolis na natureza [29].

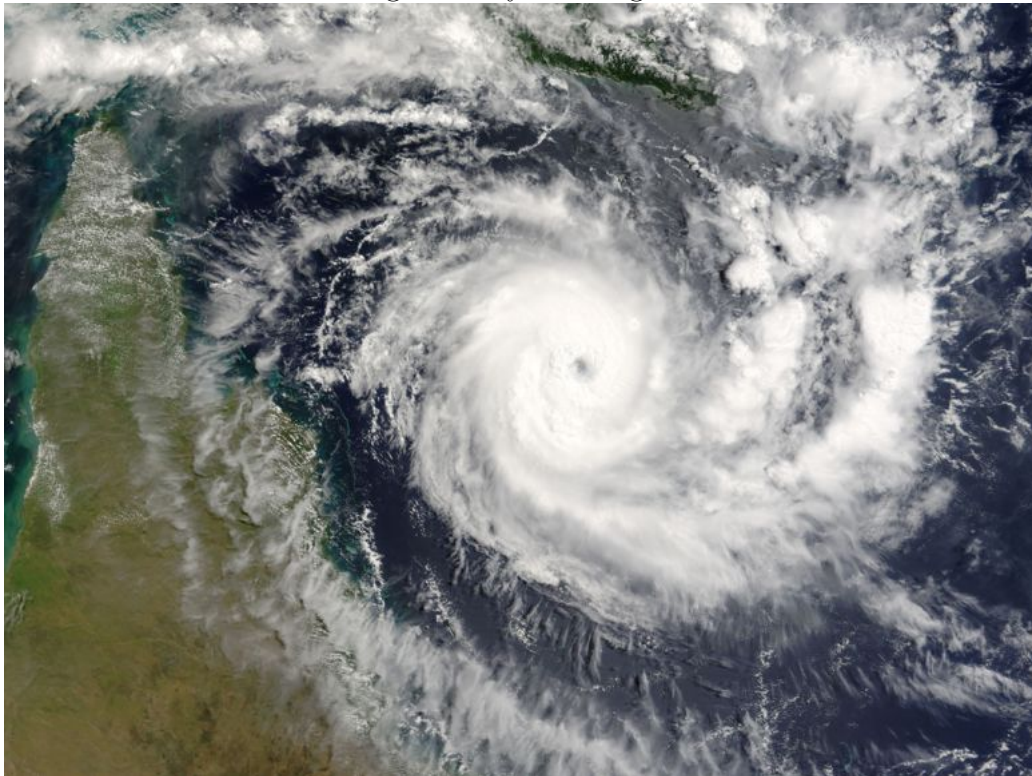
Figure 3: Direção da força de Coriolis



Fonte: Taylor, 2013.

Fig. 3: O círculo está girando no sentido anti-horário relativo a um referencial inercial. A velocidade angular $\vec{\Omega}$ do círculo girante aponta para cima da figura. Independente das posições e velocidades das partículas, a força de Coriolis tende sempre a deslocar a velocidade para a direita. Se o círculo estivesse girando no sentido horário esse deslocamento da velocidade da partícula seria para o lado esquerdo.

Figure 4: cyclone-ingrid



Fonte:nationalgeographic, 2022.

Um dos efeitos da força de Coriolis e que afeta muitas pessoas são os furacões e ciclones e o sentido do giro deles está diretamente ligado ao hemisfério de sua origem, sendo sentido horário no hemisfério norte e sentido anti-horário no hemisfério sul.

3 RESULTADOS

Por meio do formalismo lagrangiano busca-se encontrar equações de movimento que descrevam a trajetória de partículas carregadas num referencial não-inercial, na presença de defeito topológico e submetidas a campo magnético constante. Nos apêndices são apresentados o início dos resultados obtidos via formalismo hamiltoniano, onde já obteve-se a hamiltoniana do sistema estudado.

3.1 Via formalismo lagrangiano

Ao realizar os estudos necessários para chegarmos nesta etapa do trabalho, durante as pesquisas efetuadas foi encontrada a base da lagrangiana para uma partícula carregada em campo magnético uniforme, num referencial em rotação que será dada por [30]

$$L = \frac{1}{2}mv^2 - V_{eff}, \quad (55)$$

sendo V_{eff} o potencial efetivo do sistema e nele temos a soma das energias potenciais do sistema, logo

$$V_{eff} = U_r + V, \quad (56)$$

onde,

U_r é a energia potencial do referencial que está rotacionando

$$U_r = -\frac{1}{2}m|\vec{\Omega} \times \vec{r}|^2 - m(\vec{\Omega} \times \vec{r})\vec{v}_r. \quad (57)$$

Os termos de U_r estão relacionados às forças centrífuga e de Coriolis, nele o autor da referência faz uma relação das equações dessas forças com a da força magnética partindo de $\vec{F} = e(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$ até chegar a equação final que se relaciona com 57.

V é uma energia potencial qualquer do sistema, em nosso estudo é a energia potencial do campo magnético uniforme

$$V_m = e \cdot \vec{A} \cdot \vec{v}, \quad (58)$$

Inicialmente o trabalho contaria apenas com o potencial magnético, mas o fato de as

partículas carregadas estarem girando na presença desse campo magnético faz com que haja também um campo elétrico no sistema. Portanto, sendo a velocidade de rotação do referencial muito menor que a velocidade da luz, tem-se que [31]

$$\vec{E}' = \vec{E} + \vec{V} \times \vec{B}, \quad (59)$$

onde \vec{E}' é o campo elétrico no referencial girante, \vec{E} e \vec{B} são campos eletromagnéticos no referencial de um laboratório e V é a velocidade de cada ponto do referencial que está girando, portanto depende do raio, logo, $\vec{V} = \vec{\Omega} \times \vec{r}$.

Observa-se que o campo elétrico no referencial que está rotacionando é o campo elétrico aplicado em laboratório mais um componente que depende da rotação e do campo magnético. Portanto independente de as partículas carregadas não estarem sendo submetidas a um campo elétrico, haverá essa componente devido a rotação do referencial e ao campo magnético aplicado.

Logo, o potencial elétrico será escrito como

$$V_e = -\frac{\Omega B r^2}{2} \quad (60)$$

onde Ω é a velocidade angular do referencial que está rotacionando e B o campo magnético do sistema.

Portanto no potencial V da equação 56 teremos dois termos adicionados, onde o V_m da equação 58 é a energia potencial do campo magnético uniforme e V_e da equação 60 é a energia potencial elétrica.

Fazendo as substituições de 57, 58 e 60 na equação 55 a lagrangiana resultante será então

$$L = \frac{1}{2}m\vec{v}^2 + \frac{1}{2}m|\vec{\Omega} \times \vec{r}|^2 + m(\vec{\Omega} \times \vec{r})\vec{v}_r + e \cdot \vec{A} \cdot \vec{v} - \frac{e\Omega B r^2}{2}. \quad (61)$$

O produto vetorial $|\vec{\Omega} \times \vec{r}|$ da equação tem o seguinte resultado

$$|\vec{\Omega} \times \vec{r}| = \begin{vmatrix} r & \theta & z \\ 0 & 0 & \Omega \\ r & 0 & z \end{vmatrix} = (0, \Omega r, 0) \quad (62)$$

como na equação 61 o produto vetorial está elevado ao quadrado ficamos com

$$|\vec{\Omega} \times \vec{r}|^2 = \Omega^2 r^2. \quad (63)$$

Sabendo que o elemento de linha de uma desclinação é dado pela equação 42, as componentes de sua métrica podem ser escritas de forma matricial [26]

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha^2 r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (64)$$

pois trata-se de um de vários sistemas com propriedades como torção e curvatura de um espaço contidas numa quantidade geométrica chamada tensor métrico. É, portanto, representado por uma matriz simétrica, podendo ser escrita com diferentes componentes dependendo do sistema de coordenadas que está utilizando.

O potencial vetor de uma desclinação é diferente do válido para um espaço euclidiano, pois o rotacional depende da métrica. Para um campo magnético uniforme na direção z o potencial vetor é dado por [26].

$$\vec{A} = \left(0, \frac{Br}{2\alpha}, 0\right). \quad (65)$$

A partir de agora é possível então realizar as substituições das equações 63, 64 e 65 na 61, chegando na lagrangiana que representa o nosso sistema estudado

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + \alpha^2 r^2 \dot{\theta}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}m\Omega^2 r^2 + m\Omega\alpha r^2 \dot{\theta} + \frac{eBr^2 \dot{\theta}}{2} - \frac{e\Omega Br^2}{2}. \quad (66)$$

Essa lagrangiana resulta em três equações de movimento, em r , θ e z .

Em z , é solucionado fazendo as substituições da equação 66 na 11, dessa forma teremos

$$\left(\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{z}}\right) = (0 = \frac{d}{dt} m\dot{z}) = (0 = m\ddot{z}) \quad (67)$$

que é a equação que descreve o movimento da partícula na direção z , em que o campo magnético é constante.

Para solucionar a equação em θ , vamos novamente substituir na 11, mas dessa vez igualando-a a 0, da seguinte maneira

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = 0 \quad (68)$$

Derivando θ e $\dot{\theta}$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \quad (69)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m\alpha^2 r^2 \dot{\theta} + m\Omega\alpha r^2 + \frac{eBr^2}{2} \quad (70)$$

Então

$$\frac{d}{dt} \left(m\alpha^2 r^2 \dot{\theta} + m\Omega\alpha r^2 + \frac{eBr^2}{2} \right) = 0 \quad (71)$$

Dessa forma, temos que

$$m\alpha^2 r^2 \dot{\theta} + m\Omega\alpha r^2 + \frac{eBr^2}{2} = K \quad (72)$$

onde K é constante.

Podemos agora isolar $\dot{\theta}$ na equação para utilizar posteriormente, logo

$$\dot{\theta} = \left(\frac{K - m\Omega\alpha r^2 - \frac{eBr^2}{2}}{m\alpha^2 r^2} \right) \quad (73)$$

Resolvendo por fim equação de Euler Lagrange de r

$$\frac{\partial L}{\partial r} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = 0 \quad (74)$$

Logo,

$$m\alpha^2 r \dot{\theta}^2 + m\Omega^2 r + 2m\Omega\alpha r \dot{\theta} - e\Omega Br + eBr \dot{\theta} - m\ddot{r} = 0 \quad (75)$$

Chegou-se então numa equação em termos das coordenada r e θ . Afim de facilitar os cálculos pode-se deixar a equação em termos de apenas uma coordenada, neste caso deixaremos em termos da coordenada r , visto que já havíamos isolado $\dot{\theta}$ na equação 73 o que facilitará nosso trabalho agora. Portanto

$$\begin{aligned}
m\alpha^2 r \left(\frac{K - m\Omega\alpha r^2 - \frac{eBr^2}{2}}{m\alpha^2 r^2} \right)^2 + m\Omega^2 r + 2m\Omega\alpha r \left(\frac{K - m\Omega\alpha r^2 - \frac{eBr^2}{2}}{m\alpha^2 r^2} \right) - \\
e\Omega Br + eBr \left(\frac{K - m\Omega\alpha r^2 - \frac{eBr^2}{2}}{m\alpha^2 r^2} \right) - m\ddot{r} = 0,
\end{aligned} \tag{76}$$

que é a equação que descreve o movimento da partícula carregada em um referencial não-inercial, na presença de defeito topológico, desclinação, e submetida a campo magnético uniforme.

A partir de agora em que tem-se a equação que descreve a trajetória da partícula em termos apenas da coordenada r é possível então buscar resultados. Não foi possível encontrar soluções analíticas para a equação citada, portanto trabalhou-se com resultados qualitativos, criando gráficos e para isso atribuiu-se as seguintes condições iniciais: $r(0) = 1$, $\dot{r}(0) = 0$, $\theta(0) = 0$, $e = 1$, $B = 0$ e $m = 1$. Esses dados iniciais significam que a partícula inicia seu movimento na posição em $r = 1$, a posição em θ tem início no ponto $\theta = 0$ e que para a partícula não há velocidade radial. Por simplicidade atribuiu-se a e e a m o valor de 1.

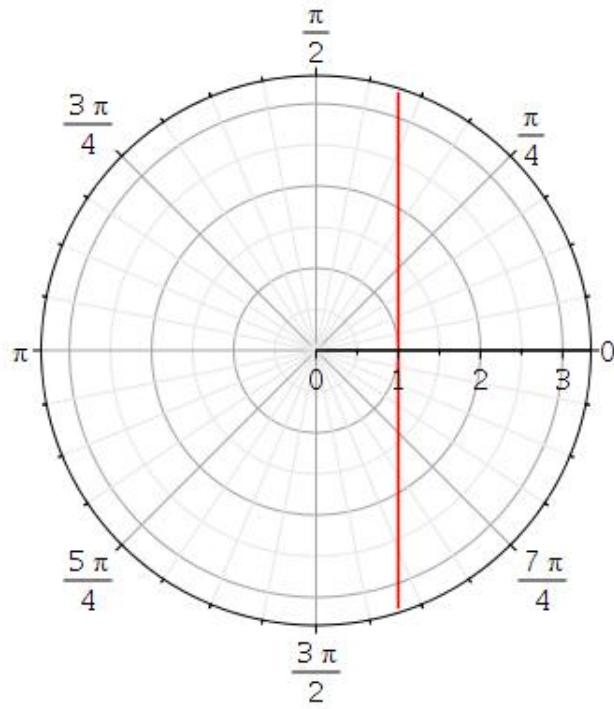
Observando a figura 5 nota-se uma trajetória na qual a partícula não experimenta nenhuma força. Como não há nenhuma força atuando na partícula ela permanece em movimento retilíneo uniforme.

Para as imagens seguintes as condições iniciais mudam pelo fato de agora estarmos trabalhando com campo magnético constante, portanto temos: $r(0) = 1$, $\dot{r}(0) = 0$, $\theta(0) = 0$, $e = 1$, $B = 1$ e $m = 1$.

Na figura 6 é possível observar um gráfico com a trajetória de uma partícula carregada na presença de um campo magnético uniforme. Nota-se bem o percurso percorrido por ela, um círculo fechado, e vai de acordo com a teoria que diz que a partícula carregada fica confinada num movimento circular. Esse percurso é limitado pelas posições $r = 1$ e $r = 3$ formando um raio $R = 1$.

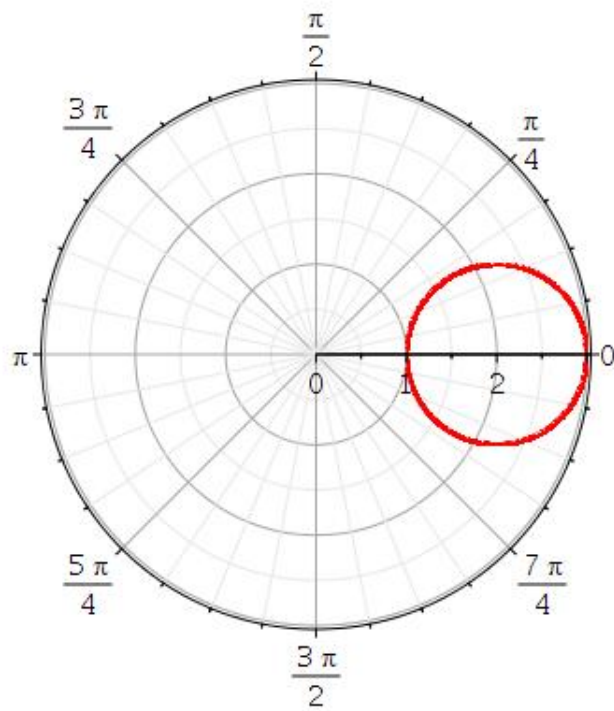
Na figura 7 adicionou-se o defeito topológico de desclinação com $\alpha = \frac{5}{6}$, isso significa que em um círculo dividido em seis partes iguais retirou-se uma parte e uniu-se as duas pontas que sobraram, formando uma espécie de cone. O acréscimo da desclinação ao campo magnético resultou em um leve achatamento da trajetória circular da partícula que se manteve fechada, com isso o alcance em r que antes foi até 3, quando havia somente o

Figure 5: Trajetória de uma partícula livre.



Fonte:Autor.

Figure 6: Trajetória com campo magnético constante no espaço euclidiano.

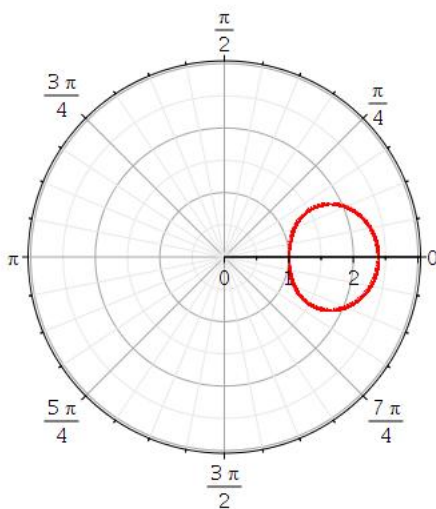


Fonte:Autor.

campo magnético atuando no sistema, agora não chegou a 2,5.

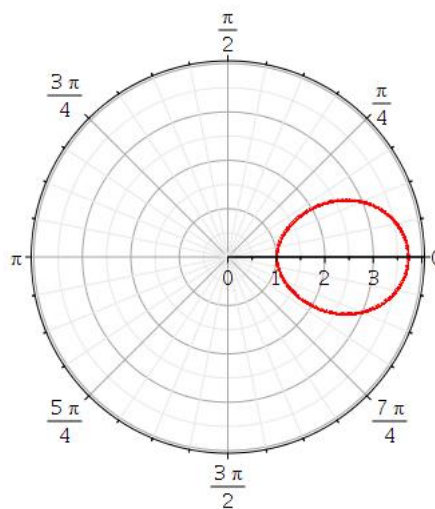
À figura 8 adicionou-se uma desclinação de $\alpha = \frac{7}{6}$ que de forma diferente a figura 7 que retirou uma parte do círculo, nessa é adicionado uma fatia de mesmo tamanho as outras na circunferência que tem por resultado aproximadamente uma "cela de cavalo". No gráfico obtido é possível observar um percurso oval da partícula carregada, também se mantendo fechado. O alcance máximo em r da trajetória nesse caso teve um aumento, passando dos 3,6.

Figure 7: Trajetória com campo magnético uniforme $B = 1T$ e desclinação $\alpha = \frac{5}{6}$.



Fonte:Autor.

Figure 8: Trajetória com campo magnético uniforme $B = 1T$ e desclinação $\alpha = \frac{7}{6}$.



Fonte:Autor.

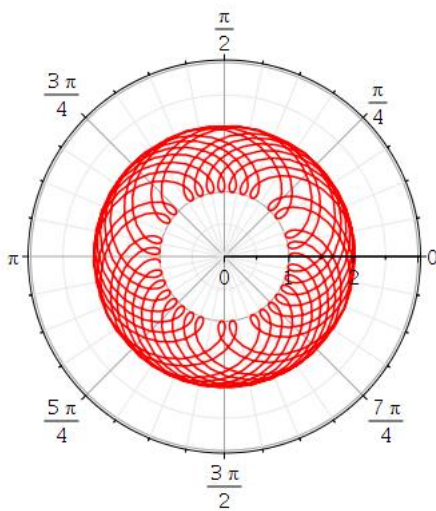
Neste momento elaborou-se gráficos somente com o campo magnético constante de $B = 1T$ e rotações de $\Omega = 5Hz$ e $\Omega = 10Hz$, nas figuras 9 e 10 respectivamente. As imagens obtidas indicam que quanto maior a frequência de rotação do sistema maior é o alcance da partícula em r no gráfico, ou seja, mais afastada do centro de rotação a partícula consegue chegar, visto que com uma frequência giratória de $5Hz$ o alcance em r foi até 2 e para $10Hz$ passou dos 2,5. Este fato é explicado pela ação da força centrífuga que faz a partícula se afastar do centro rotacional, pois quanto maior a frequência com que o sistema gira mais forte é força centrífuga atuando sobre no sistema.

A ação da rotação no sistema também fez com que a trajetória percorrida pela partícula apresentasse voltas, como uma mola, e esse fato é causado pela atuação da força de Coriolis que vai deslocando a partícula carregada para direita, pois o nosso referencial está rotacionando no sentido horário. Como também é possível notar nas figuras, quanto

maior o valor de Ω mais distante entre si ficam as voltas que o caminho percorre, outra ação da força centrífuga no sistema.

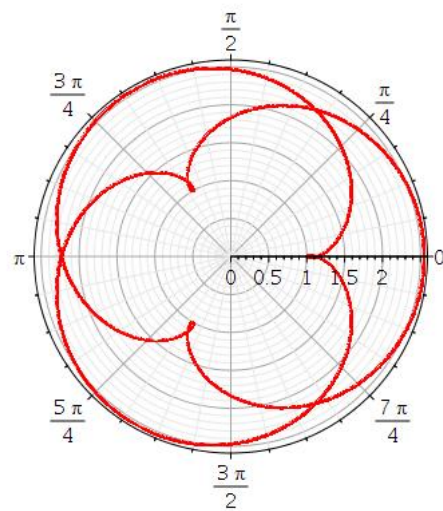
Outro fato interessante de se observar é que no gráfico da figura 10 embora não tenha sido uma trajetória circular perfeita como na figura 6 ela também é um percurso fechado. Diferentemente da figura 9 que com uma rotação de $\Omega = 5Hz$ nos mostra uma caminho aberto percorrido pela partícula.

Figure 9: Trajetória com campo magnético uniforme $B = 1T$, desclinação $\alpha = 1$ e rotação $\Omega = 5Hz$.



Fonte:Autor.

Figure 10: Trajetória com campo magnético uniforme $B = 1T$, desclinação $\alpha = 1$ e rotação $\Omega = 10Hz$.



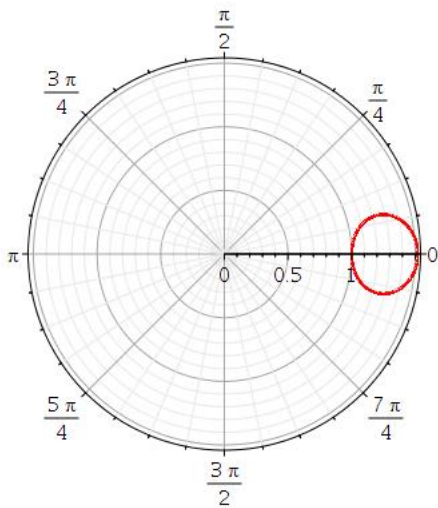
Fonte:Autor.

Agora inicia-se a investigação adicionando-se os três pontos do problema proposto na elaboração dos gráficos. Para a figura 11 utilizou-se $\alpha = \frac{5}{6}$ e $B = 1T$ e na figura 12 foram utilizados $\alpha = \frac{7}{6}$ e $B = 1T$. Para ambos foi adicionada uma rotação do sistema de $\Omega = 1Hz$. Nestes casos resultaram em trajetórias ovais, onde na figura 11 o alcance máximo em r foi de aproximadamente 1,5, já na figura 12, com $\alpha = \frac{7}{6}$ o alcance máximo ficou novamente maior, de 1,8.

Com uma frequência de rotação de apenas $1Hz$ a trajetória da partícula se manteve fechada. Este fato nos permite perceber que uma frequência de rotação baixa, foi suficiente para deslocar a partícula e modificar seu percurso, mas não foi o bastante para permitir que esse caminho não seguisse fechado.

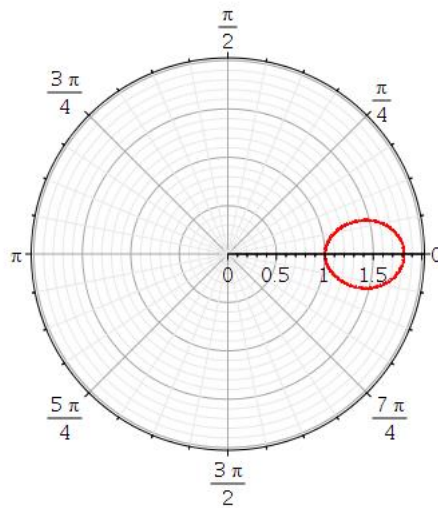
A partir das figuras 13 e 14 temos uma rotação de $\Omega = 2Hz$ e que já foi o suficiente para alterar a trajetória da partícula e fazer com que ela não percorresse mais um caminho fechado, mas passou a dar voltas fazendo o formato de uma mola. Com $\alpha = \frac{5}{6}$ o alcance

Figure 11: Trajetória com campo magnético uniforme $B = 1T$, desclinação $\alpha = \frac{5}{6}$ e rotação $\Omega = 1Hz$.



Fonte:Autor.

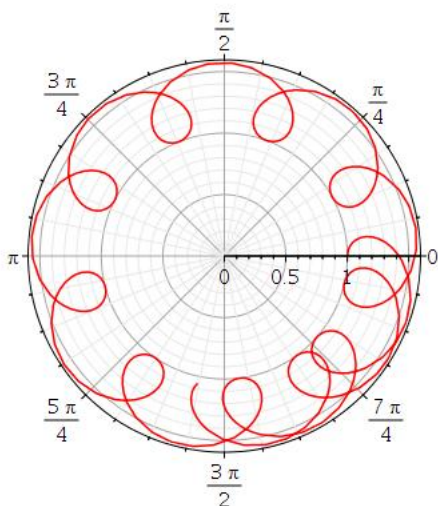
Figure 12: Trajetória com campo magnético uniforme $B = 1T$, desclinação $\alpha = \frac{7}{6}$ e rotação $\Omega = 1Hz$.



Fonte:Autor.

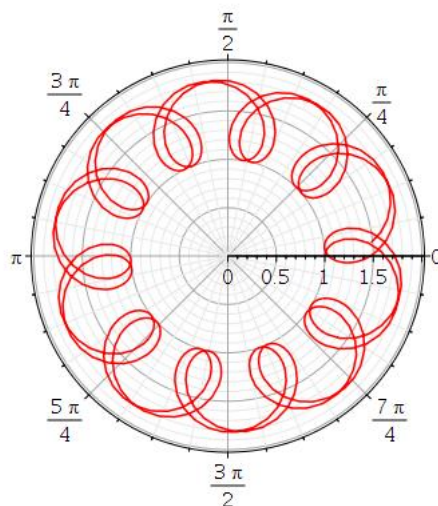
máximo em r foi de 1,6, enquanto com $\alpha = \frac{7}{6}$ chegou a 1,8, demonstrando mais uma vez os efeitos da desclinação no sistema, onde o $\alpha = \frac{5}{6}$ tende a diminuir o alcance máximo em r da partícula.

Figure 13: Trajetória com campo magnético uniforme $B = 1T$, desclinação $\alpha = \frac{5}{6}$ e rotação $\Omega = 2Hz$.



Fonte:Autor.

Figure 14: Trajetória com campo magnético uniforme $B = 1T$, desclinação $\alpha = \frac{7}{6}$ e rotação $\Omega = 2Hz$.

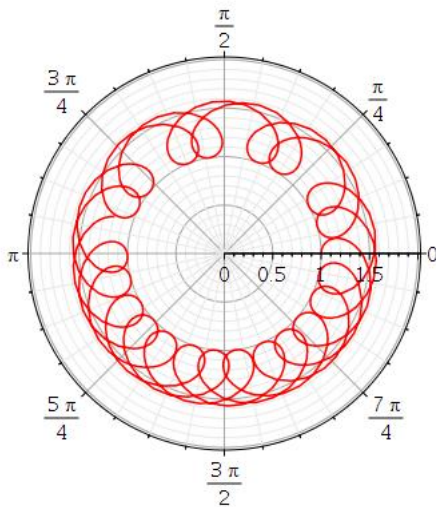


Fonte:Autor.

Nas figuras 15 e 16 tem-se exatamente a mesma situação colocada para a formação do gráfico elaborado na figura 13, porém deixou-se que o programa computacional rodasse por um período de tempo maior, mais precisamente $t = 10\pi s$ e $t = 50\pi s$ respectivamente,

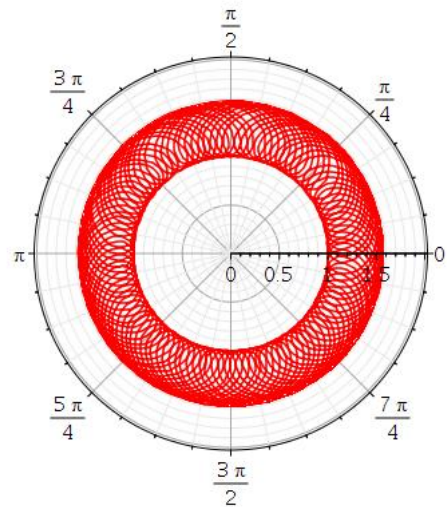
até que se formasse a imagem final que está sendo apresentada. Percebe-se que a partícula mantém o percurso de fazer voltas formando uma figura que lembra uma mola, e quanto mais o tempo passa mais vai preenchendo o gráfico, ficando como uma roda com uma espessura bem definida, ficando do $r = 1$ a aproximadamente $r = 1,6$.

Figure 15: Trajetória com campo magnético uniforme $B = 1T$, desclinação $\alpha = \frac{5}{6}$ e rotação $\Omega = 2Hz$ com um tempo $t = 10\pi s$.



Fonte:Autor.

Figure 16: Trajetória com campo magnético uniforme $B = 1T$, desclinação $\alpha = \frac{5}{6}$ e rotação $\Omega = 2Hz$ com um tempo $t = 50\pi s$.



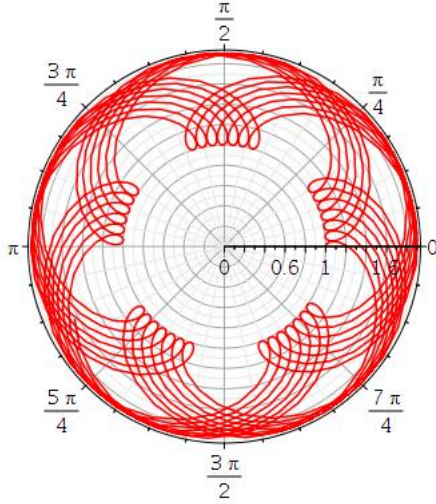
Fonte:Autor.

A cada mudança na frequência de rotação é notável as mudanças no desenho da trajetória da partícula carregada que é traçada pelo gráfico. Continuou-se atribuindo os valores de $B = 1$, $\alpha = \frac{5}{6}$, mas agora com rotação $\Omega = 5Hz$ tanto para figura 17, em que determinou-se um tempo $t = 10\pi s$, quanto para figura 18 onde o tempo foi de $t = 100\pi s$. Em ambos os gráficos a partícula executa o mesmo percurso, em que por conta da rotação do sistema fica impedida de efetuar uma rota fechada. A diferença entre as imagens se dá pelo fato do tempo para execução do programa computacional que na 18 foi maior.

Nas imagens percebem-se a ação do campo magnético constante que mantém a partícula confinada no espaço determinado no gráfico. Tem-se a força de Coriolis fazendo a partícula manter uma trajetória seguindo em voltas. A força centrífuga afastando a partícula do centro de rotação. A desclinação de $\alpha = \frac{5}{6}$ impedindo que a partícula se afaste muito na direção r resultando numa posição $r = 1,9$. Cada um com sua parcela de atuação no sistema proposto e dando como resultado final a figura trabalhada.

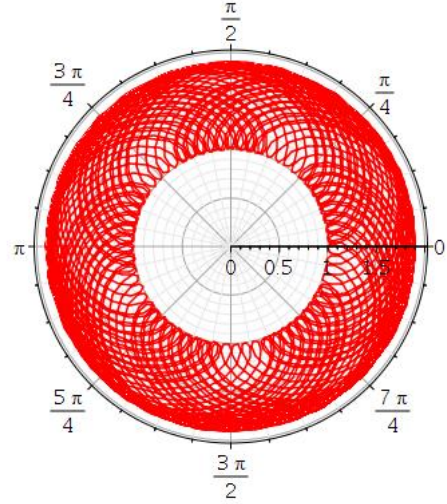
Na figura 19 tem-se o campo constante de $B = 1T$, $\alpha = \frac{5}{6}$ e uma rotação $\Omega = 10Hz$, que como dito anteriormente referente a figura 10, uma rotação com frequência mais alta

Figure 17: Trajetória com campo magnético uniforme $B = 1T$, desclinação $\alpha = \frac{5}{6}$ e rotação $\Omega = 5Hz$ com um tempo $t = 10\pi s$.



Fonte:Autor.

Figure 18: Trajetória com campo magnético uniforme $B = 1T$, desclinação $\alpha = \frac{5}{6}$ e rotação $\Omega = 5Hz$ com um tempo $t = 100\pi s$.



Fonte:Autor.

faz a partícula, durante seu desenho de trajeto, tender a um alcance máximo em r maior, que neste caso chegou a aproximadamente 2,4. Esse alcance poderia ter sido ainda maior caso não tivéssemos a ação do defeito topológico atuando neste sistema, pois como foi observado, a desclinação de $\alpha = \frac{5}{6}$ age no sentido oposto a força centrífuga, diminuindo o alcance máximo em r da partícula.

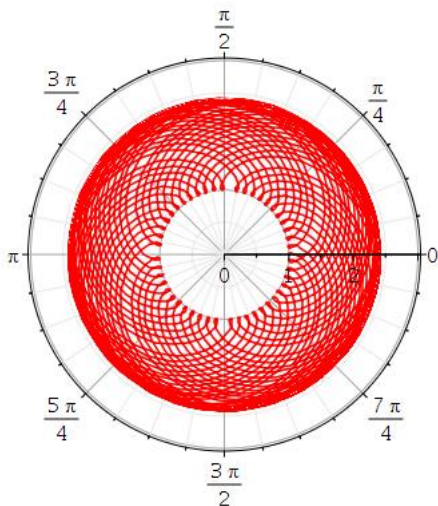
Com a figura 20, a desclinação foi alterada para $\alpha = \frac{7}{6}$, manteve-se o campo em $B = 1T$ e atribuiu-se uma rotação de apenas $\Omega = 2Hz$. Com as alterações realizadas o alcance máximo da partícula em r foi de apenas 1,8.

Os últimos gráficos foram elaborados com desclinação de $\alpha = \frac{7}{6}$, campo $B = 1T$ e feita a comparação com duas rotações diferentes, de $\Omega = 5Hz$ nas figuras 21 e 22, de $\Omega = 10Hz$ nas figura 23 e 24. É notável a diferença entre as imagens, visto a que contem uma frequência de rotação mais baixa a partícula dá menos voltas até completar todos os 360 graus da circunferência do gráfico, diferentemente do caso em que os giros são mais velozes na figura 23 que resultou em mais voltas. Há também a diferença do alcance máximo do desenho da trajetória que é mais aparente nas figuras 22 que chegou a $r = 2,2$, com uma frequência rotacional mais baixa e 24 que alcançou a marca de $r = 2,7$ com a frequência de rotação mais alta.

Ao decorrer da apresentação dos gráficos pôde-se observar vários pontos:

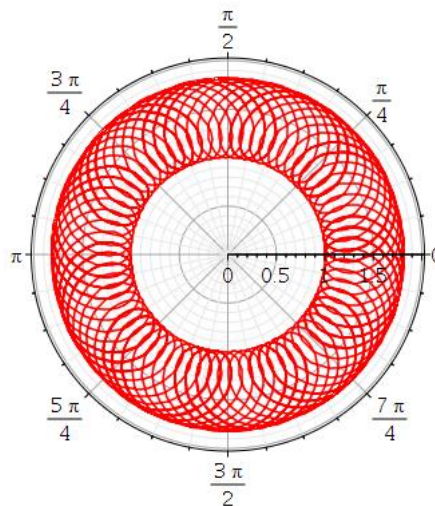
Uma partícula livre se mantém em movimento retilíneo uniforme.

Figure 19: Trajetória com campo magnético uniforme $B = 1T$, desclinação $\alpha = \frac{5}{6}$ e rotação $\Omega = 10Hz$ com um tempo $t = 100\pi s$.



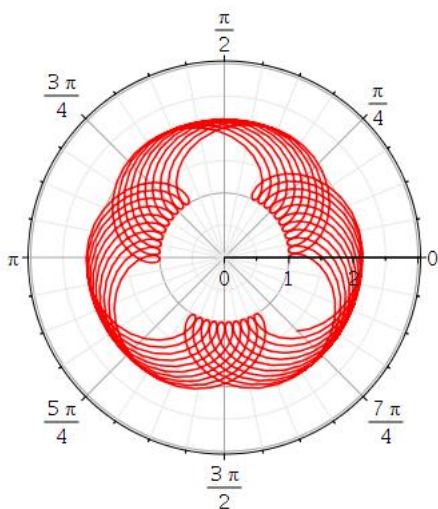
Fonte:Autor.

Figure 20: Trajetória com campo magnético uniforme $B = 1T$, desclinação $\alpha = \frac{7}{6}$ e rotação $\Omega = 2Hz$ com um tempo $t = 50\pi s$.



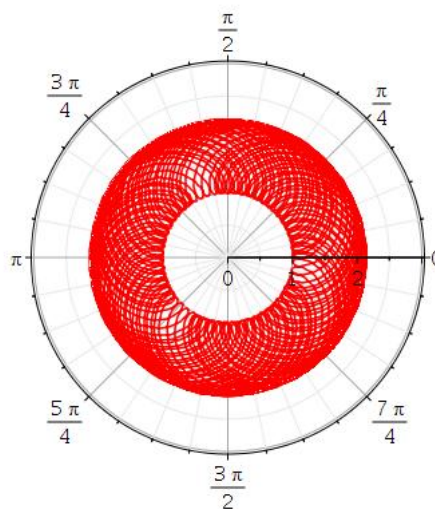
Fonte:Autor.

Figure 21: Trajetória com campo magnético uniforme $B = 1T$, desclinação $\alpha = \frac{7}{6}$ e rotação $\Omega = 5Hz$ com um tempo $t = 10\pi s$.



Fonte:Autor.

Figure 22: Trajetória com campo magnético uniforme $B = 1T$, desclinação $\alpha = \frac{7}{6}$ e rotação $\Omega = 5Hz$ com um tempo $t = 50\pi s$.



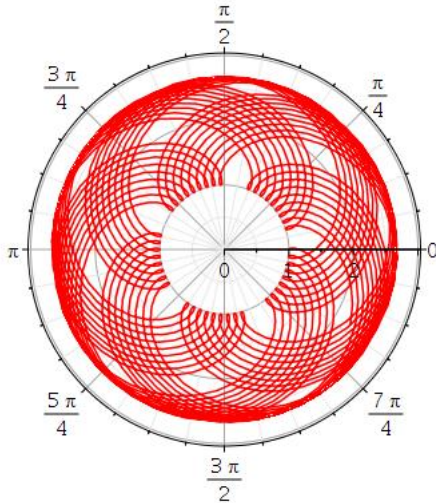
Fonte:Autor.

O campo magnético uniforme sozinho faz com que a partícula carregada percorra um caminho circular fechado, se mantendo confinada neste movimento.

Quando o defeito topológico é adicionado ao campo magnético nota-se que o percurso se modifica, tornando-se oval.

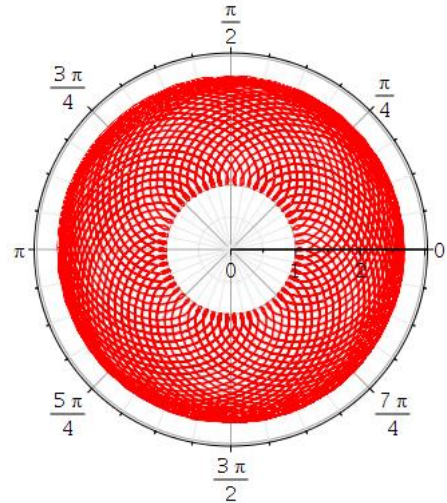
Atribuindo a rotação com o campo magnético constante, sem a presença do defeito

Figure 23: Trajetória com campo magnético uniforme $B = 1T$, desclinação $\alpha = \frac{7}{6}$ e rotação $\Omega = 10Hz$ com um tempo $t = 10\pi s$.



Fonte:Autor.

Figure 24: Trajetória com campo magnético uniforme $B = 1T$, desclinação $\alpha = \frac{7}{6}$ e rotação $\Omega = 10Hz$ com um tempo $t = 50\pi s$.



Fonte:Autor.

topológico, a partícula começou a dar voltas no gráfico formando o desenho de uma mola. Em certos valores para a frequência de rotação o percurso da partícula se mantém fechado, já para outros a trajetória passa a ser aberta.

Com campo magnético uniforme, desclinação e uma rotação de baixa frequência a trajetória da partícula é modificada, mas se mantém oval e num percurso fechado.

A partir da adição de uma frequência rotacional de $2Hz$ a partícula teve seu caminho alterado não sendo mais fechado como anteriormente.

Na apresentação do restante dos gráficos elaborados ficou perceptível o quão importante é o papel do defeito topológico e da rotação na influência da mudança da trajetória da partícula. A explicação está na ação das forças centrífuga e de Coriolis que agem de forma distintas.

A força centrífuga age expulsando a partícula do centro de rotação, essa ação resulta em um alcance máximo em r maior quanto maior for a frequência de rotação do sistema. Dependendo da frequência rotacional aumenta também a distância entre as voltas do percurso que a partícula faz no gráfico.

A força de Coriolis atua deslocando a partícula, que se movimenta no sistema girante, para esquerda ou para direita, a depender do sentido de rotação que está girando este sistema, sempre fazendo a partícula dar voltas no caminho percorrido.

4 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

Neste trabalho buscou-se analisar a dinâmica clássica de partículas carregadas submetidas a campo magnético constante, em um referencial não-inercial e na presença de defeito topológico. Para solucionar o problema foram utilizados dois formalismos diferentes, o de Lagrange e o de Hamilton. Por meio deles chegou-se a uma equação, para cada formalismo, que descreve o movimento da partícula nessas condições.

Campo elétrico inicialmente não fazia parte do problema, porém no decorrer da solução, por meio do formalismo lagrangiano, notamos que há presença de uma componente elétrica nos potenciais da lagrangiana. Isso ocorre pelo fato de a partícula estar se movendo num sistema girante e na presença de um campo magnético uniforme.

Não foi possível que trabalhássemos com soluções analíticas na equação de movimento na qual chegamos via formalismo lagrangiano, por este motivo nos empenhamos na elaboração de gráficos para visualização e análise qualitativa da trajetória da partícula carregada com diversas configurações. Para melhor entender a trajetória da partícula com cada elemento foram analisados, uma partícula livre, somente campo magnético uniforme, campo magnético com defeito topológico, campo magnético com rotação do sistema de referência e por último, os três elementos juntos, campo magnético constante com defeito topológico e rotação do sistema.

Ao decorrer da apresentação dos gráficos notamos que o campo magnético constante faz com que a partícula carregada percorra um caminho circular fechado e seja mantida confinada neste movimento.

O defeito topológico juntamente com o campo magnético uniforme modifica o percurso da partícula, tornando-o oval. Quando adicionado um defeito de $\alpha < 1$ o alcance máximo em r diminui, e para $\alpha > 1$ o alcance máximo em r aumenta.

Adicionando a rotação do sistema ao campo magnético uniforme faz com que a partícula passe a dar voltas formando um desenho de uma mola. Para certos valores da frequência de rotação o percurso da partícula se mantém fechado e para outros a trajetória é aberta.

Trabalhando ao mesmo tempo com campo magnético, defeito topológico e rotação temos como resultados percursos onde a partícula dá voltas em uma trajetória aberta. Dependendo do defeito topológico aplicado ou da frequência de rotação escolhida para o sistema tem-se variações na distância máxima em r .

Espera-se, posteriormente, continuar os estudos e nos aprofundar na análise de outras possíveis configurações dos gráficos que possam não ter sido abordadas aqui, bem como melhor compreender a relação entre os valores de Ω , B e α para se obter um percurso fechado ou aberto.

Como perspectivas pretende-se utilizar outros formalismos para solucionar o problema proposto, como de Hamilton Jacobi, bem como analisar a influência de outros defeitos topológicos no sistema.

Referências

- [1] KAMALOV, T. F. Physics of non-inertial reference frames. In: AMERICAN INSTITUTE OF PHYSICS. **AIP Conference Proceedings**. [S.l.], 2010. v. 1316, n. 1, p. 455–458.
- [2] TAYLOR, J. R. **Mecânica Clássica**. Porto Alegre: Bookman Editora LTDA, 2013.
- [3] LING, Y. et al. Quantum entanglement of electromagnetic field in non-inertial reference frames. **Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical**, v. 40, n. 30, p. 9025–9032, 2007.
- [4] MATSUO, M.; MAEKAWA, S.; SAITOH, E. Spintronics in non-inertial frames. **Nippon Butsuri Gakkai-Shi (Online)**, v. 72, n. 9, p. 641–648, 2017.
- [5] LEE, J. S.; CLEAVER, G. B. The relativistic blackbody spectrum in inertial and non-inertial reference frames. **New Astronomy**, n. 52, p. 20–28, 2017.
- [6] PERSSON, A. How do we understand the coriolis force? **Bulletin of the American Meteorological Society**, v. 79, n. 7, p. 1373–1386, 1998.
- [7] AMENGUAL, A. Noninertial trajectories on a fast rotating planet. **American Journal of Physics**, v. 68, n. 12, p. 1106–1108, 2000.
- [8] SILVA, J. E. B. da. **Efeitos geométricos, inerciais e topológicos na condutividade hall**. Tese (Doutorado em Física) — Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa/PB, 2017.
- [9] CAMPS-RAGA, B.; GYAWALI, S.; ISLAM, N. E. Germination rate studies of soybean under static and low-frequency magnetic fields. **IEEE Transactions on Dielectrics and Electrical Insulation**, v. 16, n. 5, p. 1317–1321, 2009.
- [10] PAPAETHYMIOU, G. C. Nanoparticle magnetism. **Nano Today**, v. 4, n. 5, p. 438–447, 2009.
- [11] COEY, J. Magnetism in future. **Journal of Magnetism and Magnetic Materials**, v. 226, p. 2107–2112, 2001.

- [12] BRANDENBERGER, R. H. Topological defects and structure formation. **International Journal of Modern Physics A**, World Scientific, v. 9, n. 13, p. 2117–2189, 1994.
- [13] MORAES, F. Condensed matter physics as a laboratory for gravitation and cosmology. **Brazilian Journal of Physics**, v. 30, n. 2, p. 304–308, 2000.
- [14] BUENO, M. et al. Quantum dot in a graphene layer with topological defects. **The European Physical Journal Plus**, v. 129, n. 201, p. 1–11, 2014.
- [15] TÓTH, G.; DENNISTON, C.; YEOMANS, J. M. Hydrodynamics of topological defects in nematic liquid crystals. **Physical review letters**, v. 88, n. 10, p. 105504, 2002.
- [16] ALDEN, J. S. et al. Strain solitons and topological defects in bilayer graphene. **Proceedings of the National Academy of Sciences**, v. 110, n. 28, p. 11256–11260, 2013.
- [17] BOWICK, M. J.; NELSON, D. R.; TRAVESSET, A. Interacting topological defects on frozen topographies. **Physical Review B**, v. 62, n. 13, p. 8738, 2000.
- [18] MARQUES, G. de A. et al. Landau levels in the presence of topological defects. **Journal of Physics A: Mathematical and General**, v. 34, n. 30, p. 5946–5954, 2001.
- [19] SANTOS, J. M. S. **Efeito da Distorção e de Defeitos Topológicos nos níveis de Energia de Anéis Quânticos**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Vale do São Francisco, Juazeiro, BA, 2015.
- [20] HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J. **Fundamentos de física**. 10. ed. Rio de Janeiro: LTC Editora, 2016. v. 3.
- [21] ARFKEN, G.; WEBER, H. H. **Física matemática: métodos matemáticos para engenharia e física**. Rio de Janeiro: Elsevier Editora, 2007.
- [22] BUTKOV, E. **Física Matemática**. 1. ed. Rio de Janeiro: Editora LTC, 2013.
- [23] NUSSENZVEIG, H. M. **Curso de Física Básica**. 4. ed. São Paulo: Editora Edgard Blucher, 2002. v. 3.

- [24] LEMOS, N. A. **Mecânica analítica**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2007.
- [25] KITTEL, C. **Introduction to solid state physics Eighth edition**. New Caledonia: John Wiley Sons, Inc, 2005.
- [26] SILVA, J. E. B. d. **Trajétórias de uma partícula carregada submetida a um campo magnético na geometria de um defeito topológico**. 74 p. Dissertação (Monografia, Bacharelado em Física) — Universidade Estadual de Feira de Santana, Feira de Santana, BA, 2011.
- [27] AZEVEDO, S.; PAIVA, R. de; KASCHNY, J. Spin polarization in carbon nanostructures with disclinations. **Physics Letters A**, v. 372, n. 13, p. 2315–2318, 2008.
- [28] HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J. **Fundamentos de física**. 10. ed. Rio de Janeiro: LTC Editora, 2016. v. 1.
- [29] SCHUMALTZ, J. **The Coriolis Effect: Earth's Rotation and Its Effect on Weather**. 2022. Disponível em: <<https://education.nationalgeographic.org/resource/coriolis-effect/>>.
- [30] MANDAL, S. The aspects of rotating frame—an electromagnetic analogy. **The Beats of Natural Sciences**, v. 2, n. 6, p. 1–19, 2015.
- [31] RIDGELY, C. T. Applying relativistic electrodynamics to a rotating material medium. **American Journal of Physics**, v. 66, n. 2, p. 114–121, 1998.

A Resultados via formalismo hamiltoniano

Dada a lagrangiana que representa o sistema da partícula carregada num referencial não-inercial, na presença de defeito topológico e submetida a campo magnético uniforme que está descrita na equação 66. Por simplicidade faremos nesta equação m igual a 1, portanto ficará da seguinte forma

$$L = \frac{1}{2}(\dot{r}^2 + \alpha^2 r^2 \dot{\theta}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}\Omega^2 r^2 + \Omega \alpha r^2 \dot{\theta} + \frac{1}{2}eBr^2 \dot{\theta} - \frac{1}{2}e\Omega Br^2. \quad (77)$$

Dessa lagrangiana tem-se como momentos generalizados

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = \dot{r}, \quad (78)$$

$$p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = \dot{z}, \quad (79)$$

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \alpha^2 r^2 \dot{\theta} + \Omega \alpha r^2 + \frac{eBr^2}{2}, \quad (80)$$

isolando $\dot{\theta}$ na equação anterior tem-se

$$\dot{\theta} = \frac{p_\theta - \Omega \alpha r^2 - \frac{eBr^2}{2}}{\alpha^2 r^2} \quad (81)$$

A partir deste momento encontra-se a hamiltoniana do sistema mediante a chamada transformada de Legendre

$$H(q, p, t) = \dot{q}p - L, \quad (82)$$

$$H = \dot{r}^2 + \dot{\theta} \left(\alpha^2 r^2 \dot{\theta} + \Omega \alpha r^2 + \frac{eBr^2}{2} \right) + \dot{z}^2 - \frac{1}{2}(\dot{r}^2 + \alpha r^2 \dot{\theta}^2 + \dot{z}^2) - \frac{1}{2}\Omega^2 r^2 - \Omega \alpha r^2 \dot{\theta} - \frac{eBr^2 \dot{\theta}}{2} + \frac{e\Omega Br^2}{2}, \quad (83)$$

que resulta em

$$H = \frac{\dot{r}^2}{2} + \frac{\alpha^2 r^2 \dot{\theta}^2}{2} + \frac{\dot{z}^2}{2} + \frac{e\Omega Br^2}{2} - \frac{\Omega^2 r^2}{2}. \quad (84)$$

Substituindo as velocidades pelos respectivos momentos generalizados, tem-se

$$H = \frac{1}{2} \left[p_r^2 + \alpha^2 r^2 \left(\frac{p_\theta - \Omega \alpha r^2 - \frac{eBr^2}{2}}{\alpha^2 r^2} \right)^2 + p_z^2 + e\Omega Br^2 - \Omega^2 r^2 \right] \quad (85)$$

que é a hamiltoniana que representa o sistema da partícula carregada num referencial não-inercial, na presença de defeito topológico e submetida a campo magnético constante.