INSTITUTO FEDERAL DO SERTÃO PERNAMBUCANO
CAMPUS SANTA MARIA DA BOA VISTA
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

GEAN JACKSON FERREIRA DOS SANTOS

EXPONENCIAL COMPLEXA: Uma Análise da Fórmula de Euler e suas Implicações

Santa Maria da Boa Vista
2023

GEAN JACKSON FERREIRA DOS SANTOS

EXPONENCIAL COMPLEXA: Uma Análise da Fórmula de Euler e suas Implicações

Monografia apresentada como Trabalho de Conclusão de Curso referente a Licenciatura em Matemática, Campus Santa Maria da Boa Vista do Instituto Federal do Sertão Pernambucano (IFSertãoPE), em cumprimento parcial dos requisitos para obtenção do grau de licenciado em Matemática.
Orientador: Prof. Me. Amanda de Souza Albuquerque.
Coorientador: Prof. Me. Francisco José dos Santos Nascimento.

Santa Maria da Boa Vista – PE
2023

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

S237 Santos, Gean Jackson Ferreira dos.

Exponencial complexa : uma Análise da Fórmula de Euler e suas Implicações / Gean Jackson Ferreira dos Santos. - Santa Maria da Boa Vista, 2023.
43 f. : il.

Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) -Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Sertão Pernambucano, Campus Santa Maria, 2023.
Orientação: Prof. Msc. Amanda de Souza Albuquerque.
Coorientação: Msc. Francisco José dos Santos Nascimento.

1. Matemática. 2. Fórmula de Euler. 3. Funções complexas. 4. Leonhard Euler. I. Título.

CDD 510

Gerado automaticamente pelo sistema Geficat, mediante dados fornecidos pelo(a) autor(a)

GEAN JACKSON FERREIRA DOS SANTOS

EXPONENCIAL COMPLEXA: Uma Análise da Fórmula de Euler e suas Implicações

Monografia apresentada como Trabalho de Conclusão de Curso referente a Licenciatura em Matemática, *Campus* Santa Maria da Boa Vista do Instituto Federal do Sertão Pernambucano (IFSertãoPE), em cumprimento parcial dos requisitos para obtenção do grau de licenciado em Matemática, sendo a Banca Examinadora composta pelos professores:

Prof. Me. Amanda de Souza Albuquerque
Instituto Federal de Educação do Sertão Pernambucano – IFSertãoPE
Orientador

Francisco José dos Santos Nascimento

Prof. Me. Francisco José dos Santos Nascimento.
Coorientador

Marcones de Oliveira Silva

Prof. Me. Marcones de Oliveira da Silva
Instituto Federal de Educação do Sertão Pernambucano – IFSertãoPE
Avaliador Interno

Prof. Me. Robson Franklin de Aguiar Couto
Centro de Ensino Superior do Vale do São Francisco – CESVASF
Avaliador Externo

Santa Maria da Boa Vista — PE
2023

Dedico esse trabalho a José Mendes, meu avô, Adriana Alves, minha mãe e Mizael Gonçalves, meu professor de Matemática no ensino médio.

Geralmente aqueles que sabem pouco falam muito e aqueles que sabem muito falam pouco.

(Jean Jacques Rousseau)

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus pela jornada dada, a minha mãe Adriana Alves por ter me tornado a pessoa que sou hoje, a minha família por ser minha base.

Aos meus professores do curso de Licenciatura em Matemática pelo o conhecimento aprendido.

A minha orientadora Me. Amanda De Souza Albuquerque pela confiança e apoio, ao meu Coorientador Me. Francisco José dos Santos Nascimento pela colaboração e disposição.

Por fim, aos meus amigos pela camaradagem e todos que de alguma forma contribuíram para essa monografia.

RESUMO

A monografia em questão surge das contribuições anteriores sobre a fórmula de Euler para exponencial complexa, como uma pesquisa bibliográfica que visa propiciar um exame sobre o conteúdo com um novo enfoque, onde o problema de estudo propõe compreender como a fórmula de Euler se relaciona com áreas da Matemática. Sendo seu objetivo principal analisar a fórmula de Euler para exponencial em uma variável complexa, visando especificamente apresentar a biografia do matemático Leonhard Euler e o contexto histórico para o desenvolvimento da fórmula de Euler, explicar como as funções trigonométricas e hiperbólicas se relacionam em uma variável complexa e mostrar a aplicabilidade da fórmula de Euler na resolução de Equações Diferenciais Ordinárias. Cada tópico desenvolvido abrange a fórmula de Euler, para que o leitor possa contemplar a beleza matemática vinculada a ela e entender sua importância na análise complexa que é uma assunto relevante na matemática pura e aplicada.

Palavras-chave: Fórmula de Euler, Funções complexas, Leonhard Euler.

ABSTRACT

The monograph in question arises from previous contributions on Euler's formula for complex exponentials, such as a bibliographical research that aims to provide an examination of the content with a new focus, where the study problem proposes to understand how Euler's formula relates to areas of Mathematics. Its main objective is to analyze Euler's formula for exponential in a complex variable, specifically aiming to present the biography of the mathematician Leonhard Euler and the historical context for the development of Euler's formula, to explain how trigonometric and hyperbolic functions are related in a complex variable and show the applicability of Euler's formula in solving Ordinary Differential Equations. Each topic developed covers Euler's formula, so that the reader can contemplate the mathematical beauty linked to it and understand its importance in the complex analysis that is a relevant subject in pure and applied mathematics.

Keywords: Euler's formula, Complex functions, Leonhard Euler.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 — Retrato do Matemático Euler, pintura alemã do século XVIII. 15

Figura 2 — Capa do livro Introductio in Analysin Infinitorum. 17

Figura 3 — Setor do circulo de raio α 18

Figura 4 — Gráfico 5 34

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO **12**

2 HISTÓRIA DE EULER E DA FÓRMULA DE EULER . **15**
2.1 A VIDA DE EULER **15**
2.2 O SURGIMENTO DA FÓRMULA DE EULER **16**

3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA **19**
3.1 NÚMEROS COMPLEXOS **19**
3.2 SÉRIES DE TAYLOR **23**
3.2.1 Sequências numéricas 23
3.2.2 Séries infinitas 24
3.2.3 Série de Potência e série de Taylor 26
3.3 TRANSFORMADA INTEGRAL **27**
3.3.1 Integral imprópria 27
3.3.2 Transformada de Laplace 28

4 DEMONSTRAÇÕES DA FORMULA DE EULER . . . **31**
4.1 DEMONSTRAÇÃO PARA A FÓRMULA DE EULER USANDO SÉRIES DE TAYLOR **31**
4.2 DEMONSTRAÇÃO PARA FÓRMULA DE EULER USANDO TRANSFORMADA DE LAPLACE **32**

5 APLICAÇÕES PARA FÓRMULA DE EULER **33**
5.1 FUNÇÕES COMPLEXAS **33**
5.1.1 A exponencial complexa 33
5.1.2 Funções trigonométricas 37
5.1.3 Funções hiperbólicas 38
5.2 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS **38**

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS **41**

REFERÊNCIAS **43**

1 INTRODUÇÃO

Um grande teorema ou uma demonstração importante sempre são precedidas de ideias de matemáticos anteriores que constroem uma base para que um matemático possa organizar essas ideias em um único conceito, criando assim um novo modelo ou melhorando o existente. Essa discussão é importante para se entender a construção da fórmula de Euler e o propósito desse trabalho.

Na história da Matemática muito se fala sobre descoberta, mas essa é uma ideia discutível, principalmente porque na matemática nada é encontrado pronto, todas as ideias matemáticas são desenvolvidas de modo contínuo onde a ideia se forma por meio várias contribuições (MOL, 2013).

Baseado nisso, a pesquisa em questão surge das contribuições anteriores sobre a identidade de Euler, se caracterizando segundo Lakatos e Marconi (2003) como uma pesquisa bibliográfica que visa propiciar um exame sobre o conteúdo sob um novo enfoque ou abordagem. Baseado nessa metodologia e no problema de estudo que propõe compreender como a fórmula de Euler se relaciona com áreas da Matemática, essa monografia se qualifica como um estudo de caráter descritivo, que tem como objetivo principal analisar a fórmula de Euler para exponencial em uma variável complexa. Especificamente se pretende apresentar a biografia do matemático Euler e o contexto histórico para o desenvolvimento da fórmula de Euler, explicar como as funções trigonométricas e hiperbólicas se relacionam em uma variável complexa e mostrar a aplicabilidade da fórmula de Euler.

Ao se deparar com a identidade de Euler logo se percebe que ela possui algo de especial e quando se pesquisa sobre ela é possível enxergar sua beleza Matemática e perceber que ela possibilita estabelecer ligação entre diferentes áreas do conhecimento matemático e além dele. Por isso, os matemáticos apreciam tanto essa identidade de elegância singular. Como explica Silva 2022 a beleza matemática se caracteriza pela admiração pela exatidão e elegância que deriva da abstração, simplicidade, profundidade ou ordem matemática. E quando se fala da identidade Euler é essa beleza que encontramos, nela notamos operações matemáticas (adição, potenciação e multiplicação) e 5 constantes importantes matemáticas (e, i, π, 1 e 0). O interessante é que essa identidade é simples e mesmo assim relaciona tantos aspectos matemáticos, de fato a identidade de Euler é citada como exemplo de profunda beleza matemática.

Ainda falando sobre a beleza da Matemática ao contemplarmos as demonstrações encontramos um método inequívoco para tornar um fato incontestável por meio de um raciocínio minucioso que permite chegar a essa conclusão. Logo ao se demonstrar a fórmula de Euler permitimos analisar essas características fascinantes da Matemática, evidenciando que a exploração dessa fórmula da área da análise complexa permite observar a beleza matemática da demonstração.

Então, esse estudo se justifica com o propósito de expor uma concepção que explique bem a fórmula de Euler e identidade de Euler que é um caso particular da fórmula, conceituando as relações matemáticas presentes e sua aplicabilidade, de modo que proporcione uma apreciação pela identidade de Euler. Essa pesquisa será organizada seguindo o seguinte roteiro especificado:

No capítulo 2 trataremos de explanar a história do Matemático Euler e do desenvolvimento da fórmula de Euler. Esse capítulo será subdividido em duas seções:

Na seção 2.1 informaremos sobre a história do importante matemático Leonhard Euler;

Na seção 2.2 Será explanado como foi desenvolvida a importante fórmula de Euler e seu caso particular, a identidade de Euler.

No capítulo 3 introduzimos uma abordagem teórica necessária para a compreensão de todo o trabalho. Este capítulo é subdividido em três seções:

Na seção 3.1 Desenvolvemos o conceito de números complexos, fundamentais para entender as aplicações da fórmula de Euler no capítulo 5;

Na seção 3.2 Apresentamos as séries de Taylor, que são importantes para se compreender a demonstração para fórmula de Euler seção 4.1, capítulo 4;

Na seção 3.3 tratamos a definição de transformada de Laplace, que é necessária para se compreender a demonstração para fórmula de Euler seção 4.2, capítulo 4.

No capítulo 4 vamos demonstrar a fórmula de Euler por meio de duas abordagens com diferentes conteúdos. Esse capítulo será subdivida em duas seções, cada uma com uma demonstração diferente para fórmula de Euler:

Na seção 4.1 Utilizaremos as séries de Taylor para demonstrar a fórmula de Euler;

Na seção 4.2 empregaremos a transformada de Laplace com uma demonstração alternativa para fórmula de Euler.

No capítulo 5 se pretende salientar duas aplicações para a fórmula de Euler. O capítulo será subdividido em duas seções:

Na seção 5.1 se propõe Analisar as funções exponenciais, trigonométricas e hiperbólicas em uma variável complexa;

Na seção 5.2 se pretende compreender como o uso da fórmula de Euler facilita a resolução de Equações diferenciais ordinárias.

2 HISTÓRIA DE EULER E DA FÓRMULA DE EULER

Esse capítulo em questão vai explanar sobre a história do importante matemático Leonhard Euler que é considerado um dos maiores estudiosos da Matemática, tanto em sua época como da história, será mostrado também como se deu o desenvolvimento da importante fórmula que levou seu nome e que gera a identidade que é vista como a mais bela da matemática por sua simplicidade e genialidade.

2.1 A VIDA DE EULER

Segundo Mol (2013) Leonard Euler (1707-1783) foi um prolifico matemático, é considerado o matemático mais produtivo de seu tempo, tendo publicado mais de 800 trabalhos dentre livros e artigos . Conhecido pela identidade de Euler e fórmula de Euler, da qual trata esse trabalho, porém está não é sua única contribuição, Euler é responsável pela constante de Euler, símbolo para somatório, dentre outras contribuições em inúmeras áreas da Matemática. Nascido na cidade suíça de Basel e de família de

Figura 1 — Retrato do Matemático Euler, pintura alemã do século XVIII.

Fonte: meisterdrucke

pastores protestante, Euler se tornou o maior nome matemático do século XVIII. Euler chegou a estudar teologia, mas logo se mostrou propenso para matemática, em parte devido a seu pai que havia estudado com Jakob Bernoulli, Euler pode estudar com Johann Bernoulli. Seus estudos em Matemática se somaram a medicina, astronomia, física e línguas orientais. Essa sua ampla formação contribuiu para que pudesse ingressar em uma vaga de medicina na Academia de S. Pertersburgo em 1727, aos seus 20 anos, onde estavam os irmãos Nicoulaus e Daniel Bernoulli, foi durante essa sua estadia na Russia que surgiram suas primeiras descobertas em matemática. Euler então por recomendação dos Bernoulli assumiu como membro da secção de medicina e fisiologia. Passados 3 anos, em 1730, Euler passou a assumir a cadeira de filosofia natural, e, em 1733 com a volta de Daniel a Suíça, para apossar a cadeira de matemática da Universidade da Basileia. Em detrimento a isso, Euler, veio a se tornar o principal matemático da Academia (BOYER; MERZBACH, 2012; EVES, 2011).

Mas Euler não prestigiou somente a Academia de São Petersburgo, a convite de Frederico, O grande, para fazer parte da Academia de Berlim, em 1741, onde passou vinte e cinco anos publicando inúmeros artigos. Euler fez publicações em todos os ramos da matemática, mesmo quando teve a infelicidade de ficar cego em 1766 manteve suas contribuições em matemática.

Euler publicou mais de 500 trabalhos em vida e após sua morte em 1783 ainda surgiram publicações a seu respeito. Ele se tornou conhecido por seu trabalho em cálculo, análise matemática, teoria dos números, geometria, mecânica e ótica, tendo atuado praticamente em todos os campos da matemática, inclusive escrevendo livros didáticos de ensino. Além disso, Euler foi um dos primeiros matemáticos a usar a notação matemática moderna, incluindo a letra "e"para representar a base do logaritmo natural e a letra "i"para representar a unidade imaginária $\sqrt{-1}$.

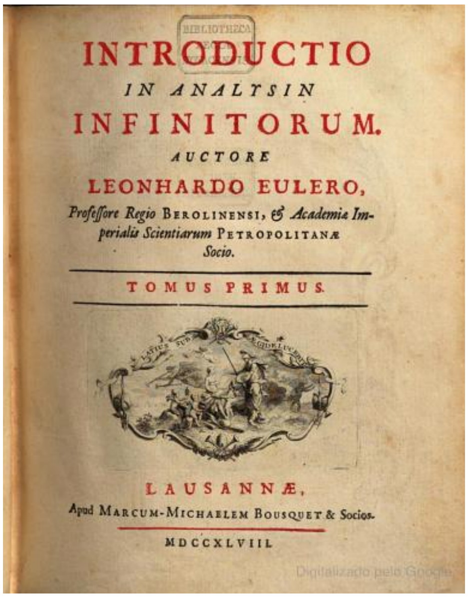
2.2 O SURGIMENTO DA FÓRMULA DE EULER

Como explica Reis (2019) O desenvolvimento da fórmula de Euler começou com Jonh Napier ao introduzir o conceito de logaritmos, a partir daí matemáticos como Gottfried Leibniz, Johann Bernoulli e Roger Cotes começaram a estudar os logaritmos de números complexos, essas contribuições culminaram na fórmula de Euler $e^{i\theta} = cos\theta + isen\theta$ publicada em seu trabalho *Introductio in Analysin Infitorum*, esse livrou deu base para a matemática durante a segunda metade do século dezoito, dessa fórmula temos o particular resultado $e^{i\pi} + 1 = 0$, ou como é conhecida a identidade de Euler, que levou seu nome por suas contribuições, visto que ele não chega a esse resultado.

Esses resultados obtidos por Euler já tinham sido visto anteriormente, Roger Cotes (1682-1716) foi o primeiro a estabelecer uma relação semelhante a de Euler, como veremos a seguir:

$$\ln(cos\theta + isen\theta) = i\theta$$

Figura 2 — Capa do livro Introductio in Analysin Infinitorum.



Fonte: book.google.com

É fácil verificar pela definição de logaritmos $\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$, com $0 < a \neq 1$ e $b > 0$, que

$$\ln(cos\theta + isen\theta) = i\theta \Leftrightarrow e^{i\theta} = cos\theta + isen\theta,$$

todavia Cotes não chegou a esse resultado.

Silva (2022) mostra que outro matemático que contribuiu no estudo da fórmula de Euler foi Johann Bernoulli (1667-1748), por meio do estudo da área de um setor do circulo de raio α com centro na origem O, limitada pelo eixo x e pelo segmento que une O ao ponto (x,y) no círculo pela seguinte fórmula para sua área:

$$\frac{\alpha^2}{4i} \ln \frac{x+iy}{x-iy}$$

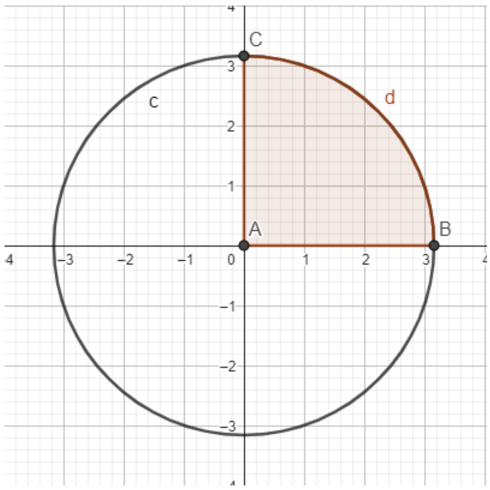
Leonhard Euler por meio dessa fórmula de área chegou a observar que ao escolher um valor para x que torne a equação somente com imaginários puros, ou seja, para $x = 0$ temos o seguinte resultado

$$\frac{\alpha^2}{4i} \ln(\frac{iy}{-iy}) =$$

$$\frac{\alpha^2}{4i} \ln(-1).$$

É evidente que o valor da área do setor circular não pode ser nula, deduzindo então que $\ln(-1)$ não pode ser zero e essa afirmação era contrária ao que pensava Johann Bernoulli, sua ideia era que $ln(-1) = 0$. O que necessariamente se mostra verdadeiro é que para x=0 o setor é equivalente a um quarto do círculo, logo sua área corresponde a

Figura 3 — Setor do circulo de raio α



Fonte: O autor

$\frac{\pi\alpha^2}{4}$. Decorre do resultado anterior que:

$$\frac{\alpha^2}{4i}\ln(-1) = \frac{\pi\alpha^2}{4} \Rightarrow \ln(-1) = i\pi$$

.

Mas Euler não seguiu nessa ideia para chegar a $e^{i\pi} = -1$, ou seja, à conhecida identidade de Euler, essa atribuição dada a Euler para essa fórmula é uma atribuição a sua contribuição nesse estudo.

3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Esse capítulo é importante como um preparativo para os próximos três capítulos, nele trataremos de explicar conteúdos prévios que consideramos importantes para a compreensão das funções complexas, das demonstrações para fórmula de Euler e de suas aplicações. Os conteúdos abordados refere-se a séries de potências e transformada de Laplace, que serão relevantes para entender os artifícios usados para demonstrar a fórmula de Euler. Esse capítulo inclui, ainda, também conceitos sobre números complexos, fundamentais para entender as funções complexas e a aplicação para fórmula de Euler.

3.1 NÚMEROS COMPLEXOS

Essa seção é importante para se compreender os próximos capítulos, pois a fórmula de Euler é expressa em função dos números complexos e se aplica diretamente nesta área da Matemática. Logo a conceituação dos números complexos irá predispor o leitor para compreensão das demonstrações, das manipulações e aplicações da fórmula de Euler. Mediante a isso esse capítulo visa explicar os números complexos fundamentando-se nos autores (CARMO; WAGNER; MORGADO, 2005; FERNANDEZ; BERNANDEZ, 2008; IEZZI, 2013; MOLTER; NACHTIGALL; ZAHN, 2020), de modo que a descrição usada permita que estudantes dos mais diversos níveis possam compreender o que está sendo mostrado.

Para isso vamos começar discutindo sobre o corpo dos números complexos. Algebricamente, um corpo é um conjunto não vazio para o qual vale as operações de adição e multiplicação, então para o corpo dos números complexo devemos expressar seu conjunto e as operações de soma e multiplicação deste conjunto. Definimos o conjunto dos números complexos, como o conjunto dos pares ordenados de números reais, representados por $\mathbb{C}$, tal que

$$\mathbb{C} = \{(x,y) : x \in \mathbb{R} \text{ e } y \in \mathbb{R}\}$$

Algebricamente, um corpo é um conjunto não vazio munido da operação de adição e multiplicação que satisfazem as seguintes propriedades propriedades:

1. Associativa (adição e multiplicação); 2. Comutatividade (adição e multiplicação); 3. Elemento neutro (adição e multiplicação); 4. Elemento simétrico (adição-oposto e multiplicação-inverso $a \neq 0$); Distributiva.

Cujas a operações de adição e multiplicação são as seguintes

$$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$$

$$(a,b)\cdot(c,d)=(ac-bd,ad+bc)$$

Como foi mencionado anteriormente, Euler foi responsável por nomear $\sqrt{-1}$ ao qual chamamos de algarismo imaginário ou unidade imaginária e indicamos por i o número complexo $(0,1)$ que satisfaz a seguinte igualdade

$$i^2=-1$$

usando a operação da multiplicação é possível provamos o algarismo imaginário

$$i^2=i\cdot i=(0,1)\cdot(0,1)=(0\cdot 0-1\cdot 1,0\cdot 1+1\cdot 1)=(-1,0)=-1$$

Por meio da propriedade associativa da multiplicação deduzimos que

$$i^3=i^2\cdot i=(-1)\cdot i=-i$$

$$i^4=i^2\cdot i^2=(-1)\cdot(-1)=1$$

De modo geral, temos que para todo $n\in\mathbb{N}$:

$$\begin{array}{cccc} i^0 & i^1 & i^2 & i^3 \\ i^4 & i^5 & i^6 & i^7 \\ i^8 & i^9 & i^{10} & i^{11} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ i^{4n} & i^{4n+1} & i^{4n+2} & i^{4n+3} \end{array}$$

Observe que as potências de i $(i^0,i^1,i^2,i^3,\ldots)$ se comportam de maneira cíclica, de modo que assumem constantemente os valores $1,i,-1,-i$.

Finalmente, dado um número complexo qualquer $z=(x,y)$, temos:

$$z=(x,y)=(x,0)+(0,y)=(x,0)+(y\cdot 0-0\cdot 1,y\cdot 1+0\cdot 0)=(x,0)+(y,0)\cdot(0,1)$$

Isto é :

$$z=x+y\cdot i$$

Então dado um número complexo representado pelo par $z=(x,y)$ e expresso por $z=x+yi$, definimos a parte real e a parte imaginária de z simbolicamente por $Rez=x$ e $Imz=y$.

Para cada número complexo, $z = x + yi$, existe um número $\bar{z} = x - yi$, denominado conjugado de z. Assim, temos a seguinte relação

$$z = x + yi \Leftrightarrow \bar{z} = x - yi.$$

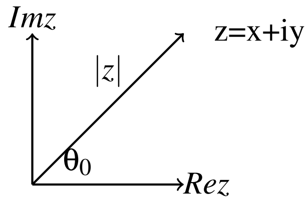
(Lê-se o complexo $z = x + yi$ se, e somente se, o conjugado $\bar{z} = x - yi$)

Exemplo 3.1

$$z = 1 + i \Leftrightarrow \bar{z} = 1 - i$$

$$z = 2 - 3i \Leftrightarrow \bar{w} = 2 + 3i$$

Consideremos um número complexo, representamos os números complexos pelos pontos do plano de Argand-Gauss xOy definimos o eixo real Ox e o eixo imaginário Oy para um ponto P correspondente a um $z = (x, y)$:



O módulo de um número complexo $z = x + iy$ é expresso por $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Façamos então o módulo do conjugado de um número complexo $z = x + iy$, temos que $\bar{z} = x - yi$, então seu módulo será

$$|\bar{z}| = \sqrt{x^2 + (-y)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Dessa forma, temos

$$|z| = |\bar{z}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Notamos que a distância entre P e O é o módulo de z, fato verificável pelo teorema de Pitágoras

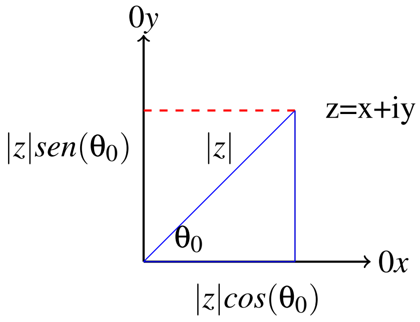
$$|z|^2 = x^2 + y^2$$

Extraindo a raiz de ambos os lados

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Seja θ_0 o ângulo formado pelo eixo real com $\vec{OP}$ no sentido anti-horário. Como $cos(\theta_0) = \frac{x}{|z|}$ e $sen(\theta_0) = \frac{y}{|z|}$, temos que:

$$z = x + iy$$



Multiplicando e dividindo por $|z|$ a direita da igualdade temos

$$z = |z| \cdot \left(\frac{x}{|z|} + i\frac{y}{|z|} \right)$$

Substituindo as expressões equivalentes a $cos\theta_0$ e $sen\theta_0$ temos

$$z = |z| \cdot (cos(\theta_0) + isen(\theta_0))$$

Chamamos θ_0 de argumento principal de z. Assim é sempre possível representar z na forma

$$z = |z| \cdot (cos(\theta) + isen(\theta))$$

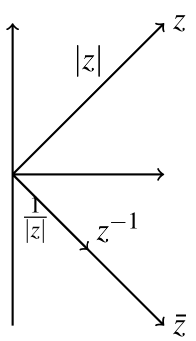
Como o ângulo θ pode assumir infinitos valores, de modo que qualquer argumento θ da forma $\theta_0 + 2k\pi$ com $k \in \mathbb{Z}$ também satisfaz z. Adotando o conjunto de todos os argumentos de z por arg$z$, temos arg$z$=$\theta_0 + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}$.

Uma interessante propriedade é obtida ao multiplicamos z e $\bar{z}$, dessa multiplicação temos que

$$z\bar{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2 + y^2 = |z|^2$$

Desse resultado, deduzimos que $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$ e ao comparamos z e z^{-1} vemos que z^{-1} aponta a direção de $\bar{z}$ e tem seu módulo $\frac{1}{|z|}$, pois

$$|z^{-1}| = \frac{|\bar{z}|}{|z|^2} = \frac{|z|}{|z|^2} = \frac{1}{|z|}$$



Desde que $cos\theta_0 = \frac{x}{|Z|}$ e $sen\theta_0 = \frac{y}{|Z|}$, temos que $z = |z| \cdot (cos\theta_0 + sen\theta_0)$

3.2 SÉRIES DE TAYLOR

Nessa subseção será explicada de maneira breve sobre séries baseado nos autores Avila (1999); Howard et al (2014); Lima (2012), começando por sequências, depois indo para séries e finalizando com séries de potências e séries de Taylor, com finalidade de fornecer embasamento para demonstrar a fórmula de Euler por meio da expansão de série de Taylor, que foi o ilustre raciocínio usado por Euler quando ele provou essa mesma fórmula.

3.2.1 Sequências numéricas

Definição 3.1 *Uma sequência numérica é uma sucessão de números a_n, que chamamos de termos, associados a cada inteiro positivo sem fim de números, particularmente expressa de maneira ordenada segundo seus índices*

$$a_1, a_2, a_3, a_4, ..., a_n, a_{n+1} ...$$

Exemplo 3.2

(i) $a_n = \frac{1}{n}$: $a_1 = 1, a_2 = \frac{1}{2}, a_3 = \frac{1}{3}$

(ii) $a_n = (-1)^{n+1}$: $a_1 = -1, a_2 = 1, a_3 = -1, a_n = 1$

Nomeamos por a_n o termo geral de uma sequência, quando conhecemos o termo geral, utilizamos essa expressão para indicar a sequência, em vez de escrever os termos iniciais. Denotamos a sequência somente pelo termo geral envolvido em chaves, como podemos ver $\{a_n\}_{m=1}^{\infty}$ ou $\{a_n\}$. Dizemos que a é o limite de uma sequência $\{a_n\}$ e escrevemos

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$

Se dado qualquer ε maior que 0, for possível encontrar um número inteiro positivo N, tal que $|a_n - a| < \varepsilon$ para todo $n > N$ e dizemos que a sequência a_n converge para a. Caso contrário, ou seja, se a sequência não possui limite, dizemos que a sequência diverge.

Definição 3.2 *Uma sequência $\{a_n\}$ é dita como*

Tipos de Séries

Sequência $\{a_n\}$	Consequência
Crescente	$a_1 < a_2 < a_3 < ... < a_n < ...$
Decrescente	$a_1 > a_2 > a_3 > ... > a_n > ...$
monótona	crescente ou decrescente
Limitada superiormente	$\exists M \,\vert\, a_n \leq M \; \forall \; n \geq 1$
Limitada inferiormente	$\exists N \,\vert\, a_n \geq N \; \forall \; n \geq 1$

Fonte: O autor

A sequência é limitada desde que seja limitada superior e inferiormente

3.2.2 Séries infinitas

Definição 3.3 *Uma série infinita é uma expressão para designar a soma de todos termos de uma sequência infinita* $\{a_n\}$*, escrita da seguinte forma*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_k + ...$$

Denominamos $a_1, a_2, a_3, ...$ *como termos da série*

Ocorre que é impossível somar uma quantidade infinita de números, então consideramos as somas parciais dos termos da série associada a sequência

$$s_1 = a_1$$

$$s_2 = a_1 + a_2$$

$$s_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

$$\vdots$$

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Chamamos o número s_n de soma parcial da série. Que forma um sequência, que é definida com a série de termos a_n

Como vimos para a sequência, também estabelecemos um limite para as séries. Se uma série $\{a_n\}$ converge para um número S, estabelecemos a soma infinita como sendo o limite das somas parciais s_n

$$a_1 + a_2 + a_3 + .. + a_n + ... = S = \lim_{n \to \infty} s_n = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

Se a sequência de somas parciais não existir, diremos que a série diverge
Para discutirmos os testes de convergência, importante mencionar três teoremas relevantes, sem nos preocuparmos em demonstrá-los neste momento.

Teorema 3.1 *Seja* $\sum a_n$ *uma série convergente, então seu termo geral tende a zero, ou seja:*
Se $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *for uma série convergente, então* $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$.

Demonstração: A demonstração pode ser consultada em (LIMA, 2012)

Teorema 3.2 *Se* α *for uma constante real não nula e ambas a séries* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *e* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *convergem, então* *(a)* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k + b_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k$*, a soma dessas séries converge*

(b) $\alpha \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha a_k$*, as séries dadas pela constante multiplicada pela série e a soma do termo geral multiplicada pela constante se assemelham e ambas convergem.*

Demonstração: A demonstração pode ser consultada em (AVILA, 1999) página 49.

Para podemos introduzir séries de potência vamos trazer três testes de convergência listados de maneira resumida

Teorema 3.3 (Testes de convergência)

Testes de convergência

Teste	Consequência	Observação
Teste de Divergência	Se $\lim_{k\to\infty} a_k \neq 0$, então $\sum a_k$ diverge	Se $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$, então $\sum a_k$ pode ou não convergir
Teste de comparação no limite	Dadas as séries de termos positivos $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ e $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ e suponha que $p = \lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k}$ Se $0 < p < +\infty$, então as séries convergirão ou divergirão	Esse teste é eficaz para comparação entre séries onde a condição de uma das séries é conhecida
Teste da razão	Se $\sum a_k$ uma série de termos positivos, e seja $p = \lim_{k\to\infty} \lvert\frac{a_{k+1}}{a_k}\rvert$ (a) A série converge se $p < 1$ (b) A série diverge se $p > 1$ ou $p = +\infty$ (c) O teste é inconclusivo se $p = 1$	Esse teste é o mais usual para séries de potências, pois os termos das séries de potência envolvem potências k-ésimas e fatoriais k-ésimos

Fonte: O autor

Demonstração: As demonstrações podem ser consultadas em (AVILA, 1999) páginas 48, 52 e 58.

3.2.3 Série de Potência e série de Taylor

Representamos uma série de potência pelo somatório

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$$

Um tipo de série de potências são as séries de Taylor e Maclaurin. Dizemos que, se for possível obter as derivadas de todas as ordens em x_0 de uma função f, então a série

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k}{k!} = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2$$

$$+ \ldots + \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \ldots$$

onde $f^(k)$ é a expressão simbólica da k-ésima derivação da função f , é chamada de série de Taylor em torno de x_0. Em particular, no caso em que $x_0 = 0$, a série é chamada de série de Maclaurin.. Dada da seguinte forma:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)x^k}{k!} = f(0) + f''(0)(x) + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \ldots \tag{3.1}$$

Por meio da série de Taylor e Maclaurin podemos definir uma função por séries de potências. Como o objetivo é estudar a fórmula de Euler iremos definir e^{ix} se tomamos que é possível substituir x por xi, as derivadas de e^{ix} ocorrem de maneira cíclica, logo

$$f(x) = e^{ix}$$

$$f'(x) = ie^{ix}$$

$$f''(x) = -e^{ix}$$

$$f'''(x) = -ie^{ix}$$

$$\vdots$$

$$f^{(k)}(x) = i^k e^{ix}$$

Logo temos que a série de Maclaurin para $f(x) = e^{ix}$ é

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k e^{i\cdot 0} x^k}{k!}$$

Como $e^{i\cdot 0} = 1$ temos que

$$e^{ix} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k x^k}{k!} = 1 + ix - \frac{x^2}{2} - \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots \tag{3.2}$$

Com um processo análogo obtemos as funções $g(x) = senx$ e $h(x) = cosx$ por séries de potências, ao derivarmos k-ésimas vezes as funções g(x) e h(x) teremos respectivamente

$$\begin{array}{ccc} g(x) = senx & e & h(x) = cosx \\ g'(x) = cosx & e & h'(x) = -senx \\ g''(x) - senx & e & h''(x) = -cosx \\ g'''(x) = -cosx & e & h'''(x) = senx \end{array}$$

Ao derivamos uma quarta vez voltamos a função em si, ou seja, $g^{(4)}x = senx = g(x)$ e $h^{(4)} = cosx = h(x)$, de maneira que esse padrão se repete a medida que calculamos as sucessivas derivadas. Do mesmo modo ocorre uma padrão ao calcularmos as sucessivas derivadas para $x_0 = 0$

$$\begin{array}{ccc} g(0) = 0 & e & h(0) = 1 \\ g'(0) = 1 & e & h'(0) = 0 \\ g''(0) = 0 & e & h''(0) = -1 \\ g'''(0) = -1 & e & h'''(0) = 0 \end{array} \tag{3.3}$$

Logo temos que as séries de Maclaurin para g(x)=senx e h(x)=cosx são respectivamente

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ...$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + ...$$

Esses três resultados obtidos serão usados para demonstrar a fórmula de Euler

3.3 TRANSFORMADA INTEGRAL

Primeiro é necessário esclarecer sobre integrais impróprias para então partimos para a transformada de Laplace. Se o leitor achar pertinente uma explicação mais detalhada sugiro a consulta dos livros (ANTON; BIVENS; DAVIS, 2014; BOYCE; DIPRIMA; MEADE, 2020).

3.3.1 Integral imprópria

Teorema 3.4 *Integral Imprópria*

Uma integral imprópria em um intervalo ilimitado é definida como o limite de integrais em intervalos fiitos. Para uma integral imprópria no intervalo, onde a é um número real,podemos escrevê-la como o limite da integral definida no integral definida no intervalo $[a, A]$, à medida que A tende ao infinito. Nesse caso, a integral imprópria é expressa como:

$$\int_{\infty}^{a} f(t)\mathrm{d}t = \lim_{A \to \infty} \int_{a}^{A} f(t)\mathrm{d}t \tag{3.4}$$

Note que $A > 0$. Dessa forma, se a integral de a até A existir para todo$A > a$ e o limite quando $A \to \infty$, diremos que a integral 3.4 converge. Caso contrário, a integral 3.4 diverge ou não existe. Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 3.3 *Calcule* $\int_{\infty}^{1} \frac{\mathrm{d}t}{t}$

$$\int_1^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \lim_{A\to\infty} \int_1^{A} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \lim_{A\to\infty} \ln t|_1^A = \lim_{A\to\infty} [\ln A - \ln 1] = \lim_{A\to\infty} \ln A = \infty$$

Como $\lim_{A\to\infty} \ln A = \infty$*, a integral imprópria diverge e, portanto não tem valor nenhum.*

Exemplo 3.4 *Calcule* $\int_1^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$

$$\int_1^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = \lim_{A\to\infty} \int_1^{A} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = \lim_{A\to\infty} \frac{-1}{t}|_1^A = \lim_{A\to\infty} \left[\frac{-1}{A} - \left(\frac{-1}{1}\right)\right] = \lim_{A\to\infty} \left[\frac{-1}{A} + \frac{1}{1}\right] = 1$$

Como o limite é finito a integral imprópria converge para 1

3.3.2 Transformada de Laplace

Definição 3.4 *Segundo (BOYCE; DIPRIMA; MEADE, 2020) Seja uma função f(t) definida no domínio* $[0, \infty)$ *com uma imagem complexa, ou seja, para* $t \geq 0$*. Então a transformada de Laplace de* $f(t)$*, a qual denotamos por* $\mathcal{L}\{f(t)\}$ *ou por* $F(s)$*, é definida pela integral*

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_{t=0}^{\infty} f(t)e^{-st}dt = \lim_{A\to\infty} \int_0^{A} e^{-st} f(t)dt \tag{3.5}$$

Sempre que esta integral convergir.

Observação 3.1 *Note que s é um parâmetro real ou complexo, isso é importante pois estamos trabalhando com números complexos.*

Estabelecemos agora as condições suficientes para a existência da transformada de Laplace $\mathcal{L}\{f(t)\}$, que serão enunciadas no seguinte teorema:

Teorema 3.5 *Suponha que*

(i) f é uma função contínua por partes no intervalo $0 \leq t \leq A$ *para qualquer A positivo*

(ii) Existem constantes $a > 0$*,* $k > 0$ *e* $M > 0$ *tais que a é uma constante qualquer*

$$|f(t)| \leq Ke^{at}$$

quando $t \geq M$

Então, a transformada de Laplace $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$*, definida pela integral 3.5, existe para* $s > a$*.*

A demonstração desse teorema pode ser consultada em (BOYCE; DIPRIMA; MEADE, 2020)

Teorema 3.6 *Linearidade da transformada de Laplace*

$$\mathcal{L}\{c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)\} = c_1\mathcal{L}\{f_1(t)\} + c_2\mathcal{L}\{f_2(t)\} \tag{3.6}$$

A Eq. 3.6 afirma que a transformada de Laplace é um **operado liner**, faremos uso dessa informação será nos exemplos a seguir.

Exemplo 3.5 *Como exemplo vamos determinar as transformadas de* e^{it}*, cost, sent que são convenientemente relacionadas a fórmula de Euler* e^{it}*=cost+isent*

Primeiramente, vamos determinar a transformada de $f(t) = e^{it}$

$$\mathcal{L}\{e^{it}\} = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} e^{it} dt$$

Como

$$= \lim_{A\to\infty}^{A} \int_0^{A} e^{(i-s)t} dt$$

Fazendo a integração por substituição de $u = (i-s)t$ e derivando u, tal que $du = \frac{dt}{i-s}$, obtemos

$$\mathcal{L}\{e^{it}\} = \lim_{A\to\infty} \left[\frac{e^{(i-s)A}}{i-s}\right]_0^A = \lim_{A\to\infty} \left[\frac{e^{(i-s)A}}{i-s} - \frac{e^{(i-s)\cdot 0}}{i-s}\right]$$

Como s é um parâmetro complexo, temos que $s \neq i$. Logo

$$\mathcal{L}\{e^{it}\} = \frac{1}{s-i}$$

Para calcular as transformadas de $\mathcal{L}\{cos(t)\}$ e $(L)\{sen(t)\}$ Procedemos usando definição de transformada novamente e por integração por partes, vejamos como encontrar a transformada de $g(t) = cos(t)$, para $t \geq 0$. Procedemos da seguinte maneira

$$\mathcal{L}\{cos(t)\} = G(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} cos(t) dt$$

Como

$$G(s) = \lim_{A\to\infty}^{A} \int_0^{A} cos(t) dt$$

Integrando por partes, obtemos

$$G(s) = \lim_{A\to\infty} [e^{-st} sen(t)|_0^A + s\int_0^A e^{-st} sen(t) dt]$$

$$= s\int_0^A e^{-st} sen(t) dt]$$

Novamente integrando por partes teremos

$$G(s) = \lim_{A\to\infty} [-e^{-st} scos(t)|_0^A - s^2 \int_0^A e^{-st} cos(t)dt]$$

$$= s - s^2 \int_0^\infty e^{-st} cos(t)dt$$

$$G(s) = s - s^2 G(s)$$

Então, resolvendo para $G(s)$, temos

$$G(s) = \frac{s}{s^2+1}$$

A transformada de $sen(t)$ é obtida de maneira análoga ao cálculo anterior então iramos omitir seu cálculo, caso o leitor tenha interesse o cálculo pode ser visto em (BOYCE; DIPRIMA; MEADE, 2020).

Temos que

$$\mathcal{L}\{sen(t)\} = \frac{1}{s^2+1}$$

4 DEMONSTRAÇÕES DA FORMULA DE EULER

Nesse capítulo focaremos em enunciar e explicar demonstrações para a fórmula de Euler por meio de duas estratégias diferentes e com conteúdos distintos de modo que se possa adequar a apresentação da fórmula, esses conteúdos estão explicados nas preliminares. Os conteúdos utilizados são as séries de Taylor e a transformada de Laplace.

4.1 DEMONSTRAÇÃO PARA A FÓRMULA DE EULER USANDO SÉRIES DE TAYLOR

O raciocínio usado para demonstrar a fórmula de Euler por das séries de potência que vamos utilizar foi mesmo usado por Euler quando ele mesmo demonstrou de modo genial essa fórmula. Vejamos como ele procedeu: Como vimos, se tomamos que é possível substituir x por xi em (3.2), teremos a seguinte série de potências

$$e^{xi} = 1 + ix + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \frac{(ix)^5}{5!} + \frac{(ix)^6}{6!} + \frac{(ix)^7}{7!} + ...$$

Sabendo que $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$ e observando que essa sequência segue de maneira cíclica, ou seja

$$\begin{array}{lll} i^5 = & i^9 = & ... = i; \\ i^2 = & i^6 = & ... = -1; \\ i^3 = & i^7 = & ... = -i; \\ i^4 = & i^8 = & ... = 1 \end{array}$$

temos que

$$e^{xi} = 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} - \frac{x^7}{7!} \tag{4.1}$$

Subdividindo em parte real e imaginária os termos na série à direita da igualdade na Eq.(4.1), temos

$$e^{xi} = (1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + ...) + i(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ...)$$

Note que, essas duas séries são as expansões das funções $cosx$ e $sinx$, respectivamente.

Assim

$$e^{xi} = cosx + isinx \tag{4.2}$$

4.2 DEMONSTRAÇÃO PARA FÓRMULA DE EULER USANDO TRANSFORMADA DE LAPLACE

como vimos na subseção 3.3.2 a transformada de Laplace da função $f(t) = e^{it}$ é

$$\mathcal{L}\{e^{it}\} = \frac{1}{s-i} \tag{4.3}$$

Multiplicando por $\frac{s+i}{s+i}$ a direita da igualdade

$$\mathcal{L}\{e^{it}\} = \frac{1}{s-i} \cdot \frac{s+i}{s+i} = \frac{s+i}{s^2+1}$$

Decompondo o resultado em duas frações

$$\mathcal{L}\{e^{it}\} = \frac{s}{s^2+1} + \frac{i}{s^2+1} \tag{4.4}$$

Como as transformadas de

$$g(t) = sin(t)$$

e

$$h(t) = cos(t)$$

são

$$\mathcal{L}\{sin(t)\} = \frac{1}{s^2+1} \tag{4.5}$$

e

$$\mathcal{L}\{cos(t)\} = \frac{s}{s^2+1} \tag{4.6}$$

Então substituindo (4.5) e (4.6) em (4.4) temos:

$$\mathcal{L}\{e^{it}\} = \mathcal{L}\{cos(t)\} + i\mathcal{L}\{sen(t)\}$$

Logo temos a fórmula de Euler se revertemos a transformada

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{it}\} = \mathcal{L}^{-1}\{cos(t)\} + i\mathcal{L}^{-1}\{sen(t)\}$$

$$e^{it} = cos(t) + isin(t) \tag{4.7}$$

5 APLICAÇÕES PARA FÓRMULA DE EULER

Neste capítulo, apresentaremos duas aplicações para fórmula de Euler. A primeira está voltado para definição das funções complexas exponencial, trigonométricas e hiperbólicas, de forma a elucidar as implicações da fórmula de Euler na análise das funções em uma variável complexa. O foco é explicar como demonstrar a identidade fundamental trigonométrica e as transformações trigonométricas da soma do seno e cosseno utilizando a fórmula de Euler, além de relacionar as funções trigonométricas e hiperbólicas. A segunda aplicação está relacionada às equações diferenciais, permitindo compreender como o uso da fórmula de Euler facilita a resolução de equações diferenciais ordinárias.

5.1 FUNÇÕES COMPLEXAS

Agora que conhecemos a demonstração da fórmula de Euler, podemos discutir algumas manipulações com a exponencial complexa e estabelecer relações entre funções trigonométricas e hiperbólicas, além de demonstrar identidades trigonométricas e hiperbólicas com auxílio da fórmula de Euler. A fórmula de Euler, juntamente como as funções trigonométricas e hiperbólicas em uma variável complexa constituem o principal objeto de estudo desse trabalho que se baseou nos autores (MOLTER; NACHTIGALL; ZAHN, 2020; FERNANDEZ; BERNANDEZ, 2008; CARMO; WAGNER; MORGADO, 2005).

5.1.1 A exponencial complexa

Como vimos na seção 3.1 o número complexo é representado de forma algébrica como $z = x + iy$. Desse modo podemos conceituar uma exponencial complexa, dada por e^z. Para isso basta substituirmos o número complexo por sua forma algébrica. Portanto, temos

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy}.$$

Assim, podemos usar a fórmula de Euler, visto que $e^{iy} = cosy + iseny$. Logo, fazendo a devida substituição na expressão, obtemos

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(cosy + iseny).$$

Note que o módulo de e^z é $|e^x|$, pois

$$|e^z| = |e^{x+iy}| = |e^x| \cdot |e^{iy}|$$

e as partes reais e imaginárias de e^{iy} são respectivamente $cosy$ e $seny$, donde concluímos que

$$|e^z| = |e^x| \cdot |cos(y) + isen(y)| = |e^x| \cdot \sqrt{cos^2(y) + sen^2(y)} = |e^x|$$

visto que, $cos^2(y) + sen^2(y) = 1$. Logo

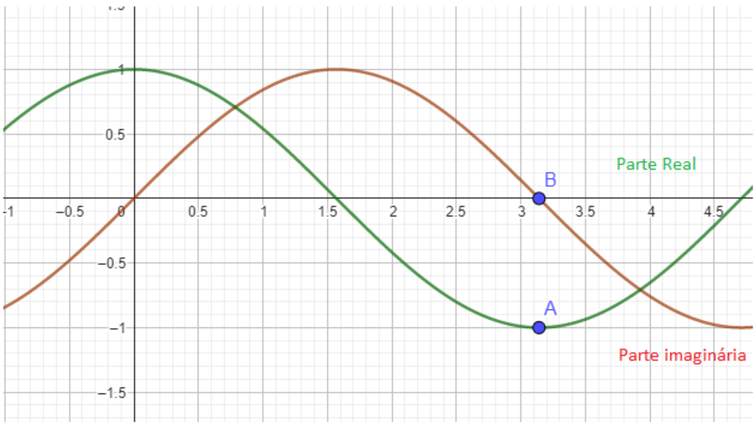
$$|e^z| = |e^x| = e^x.$$

Aplicando a exponencial complexa obtemos a fórmula de Euler fazendo $z = iy$. Assim

$$e^{iy} = cosy + iseny.$$

Podemos observar no gráfico 4 como os valores reais e imaginários de e^{iy} se comportam.

Figura 4 – Gráfico 5



Fonte: Criado pelo autor no GeoGebra

Agora, vamos calcular alguns resultados atribuindo valores a y na fórmula de Euler.

Para $y = \pi$, temos

$$e^{i\pi} = cos\pi + isen\pi \Rightarrow$$

$$e^{i\pi} = -1 \Rightarrow$$

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Essa é a famosa identidade de Euler, que já foi mencionada em capítulos anteriores. No gráfico 4, os pontos A e B representam, respectivamente, os valores assumidos por $sen\pi$ e $cos\pi$. Essa igualdade possui uma beleza intrínseca, relacionada a cinco números importantes da Matemática, o π, importante constante matemática relacionada a círculos, o e, notável constante matemática estudada pelo matemático Euler, que tem seu nome em homenagem ao matemático, o neutro aditivo 0 e o neutro multiplicativo 1. Além disso, a identidade de Euler conecta três operações aritméticas fundamentais a adição, multiplicação e potenciação.

Vejamos outro resultado interessante. Para $y = \frac{\pi}{2}$, temos que:

$$e^{\frac{i\pi}{2}} = cos\frac{\pi}{2} + isen\frac{\pi}{2}$$

$$e^{\frac{i\pi}{2}} = i$$

Com esse resultado Euler pôde calcular a potência de um número imaginário por um número imaginário e descobriu que seu resultado é um número real. Ele procedeu da seguinte forma

$$(e^{\frac{i\pi}{2}})^i = i^i$$

pela propriedade da potência $(a^n)^m = a^{n\cdot m}$, temos

$$e^{i\cdot i\frac{\pi}{2}} = i^i$$

$$e^{i^2\frac{\pi}{2}} = i^i$$

$$e^{-\frac{\pi}{2}} = i^i$$

Elevando a exponencial complexa por um valor $n \in \mathbb{Z}$, temos:

$$(e^z)^n = (e^x(cosy + iseny))^n = e^{nx}(cosy + iseny)^n$$

fazendo a exponencial do número complexo $nz = nx + iny$

$$e^{nz} = e^{nx}(cos(ny) + isen(ny)) =$$

Usando a fórmula de De Moivre, temos que $(|e^z|(cos(y) + isen(y)))^n = |e^z| \cdot (cos(ny) + isen(ny))$ e sabendo que $|e^z| = e^{Rez} = e^x$, temos o seguinte resultado por comparação

$$(e^z)^n = e^{nx}(cos(y) + isen(y))^n = e^{nx}(cos(ny) + isen(ny)) = e^{nz}$$

Ou seja,

$$(e^z)^n = e^{nz}.$$

Fazendo $z = iy$, obtemos

$$(e^{iy})^n = (cos(y) + isen(y))^n = cos(ny) + isen(ny)$$

Particularmente quando $n = -1$, teremos que

$$e^{-iy} = cos(-y) + isen(-y).$$

Sabendo que $cos(-y) = cos(y)$ e $sen(-y) = -sen(y)$ concluirmos que

$$e^{-iy} = cos(y) - isen(y),$$

que é o conjugado da fórmula de Euler como podemos observar.

O próximo resultado a ser obtido é a multiplicação de duas exponenciais complexas, dadas por e^z e e^w, com $z = x + iy$ e $w = u + iv$, tal que $z \in \mathbb{C}$ e $w \in \mathbb{Z}$. Portanto, vamos calcular $e^z \cdot e^w$

$$e^z \cdot e^w = e^{x+iy} \cdot e^{u+iv} = e^{((x+iy)+(u+iv))} = e^{(x+u)+i(y+v)} = e^{(x+u)} e^{i(y+v)}$$

Aplicando a fórmula de Euler, temos

$$e^z \cdot e^w = e^{x+u}(cos(y) + isen(y)) \cdot (cosv + isenv)$$

$$e^z \cdot e^w = e^{x+u}(cos(y)cos(v) + icos(y)sen(v) + isen(y)cos(v) + i^2 sen(y)sen(v))$$

$$e^z \cdot e^w = e^{x+u}(cos(y)cos(v) - sen(y)sen(v) + i(cos(y)sen(v) + sen(y)cos(v))) \quad (5.1)$$

Além disso pela propriedade da multiplicação de potências de mesma base $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$, temos

$$e^z \cdot e^w = e^{z+w} = e^{x+u} \cdot e^{i(y+v)} = e^{x+u}(cos(y+v) + isen(y+v)) \quad (5.2)$$

De 5.1 e 5.2, temos

$$e^{x+u}(cos(y+v) + isen(y+v)) = e^{x+u}(cosycosv - senysenv + i(cosysenv + senycosv)).$$

Multiplicando ambos os lados da igualdade por $e^{-(x+u)}$, obtemos

$$cos(y+v) + isen(y+v) = cos(y)cos(v) - sen(y)sen(v) + i(cos(y)sen(v) + sen(y)cos(v)) \quad (5.3)$$

Essa igualdade será importante para provar as transformações trigonométricas da soma do cosseno e seno para uma variável complexa e as transformação trigonométricas da soma do seno e do cosseno para uma variável complexa, mas primeiro iremos apresentar as funções trigonométricas em uma variável complexa, usando a fórmula de Euler.

5.1.2 Funções trigonométricas

Após as explanações das seções anteriores, já conhecemos a fórmula de Euler e seu conjugado. Portanto, sabendo que $e^{iy} = cos(y) + isen(y)$ e $e^{-iy} = cos(y) - isen(y)$, ao somarmos esses valores, obtemos:

$$2cos(y) = e^{iy} + e^{-iy} \Rightarrow cos(y) = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}.$$

Ao subtrairmos e^{iy} e e^{-iy}, obtemos

$$2isen(y) = e^{iy} - e^{-iy} \Rightarrow sen(y) = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}.$$

A partir desses dois resultados podemos definir as funções cosseno e seno de uma variável complexa como

$$cos(z) = \tfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} \quad e \quad sen(z) = \tfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$$

Vamos demonstrar a identidade fundamental trigonométrica de uma variável complexa $sen^2(z) + cos^2(z) = 1$ usando a fórmula de Euler e seu conjugado, bem como o inverso multiplicativo. Multiplicando e^{iz} por e^{-iz}, obtemos:

$$e^{iz} \cdot e^{-iz} = (cos(z) + isen(z)) \cdot (cos(z) - isen(z))$$

É do nosso conhecimento que ao multiplicar e^{iz} e e^{-iz}, obteremos a identidade multiplicativa, ou seja, $e^{iz} \cdot e^{-iz} = 1$. Portanto

$$e^{iz} \cdot e^{-iz} = (cos(z) + isen(z))(cos(z) - isen(z)) = cos^2(z) - i^2 sen(z) = cos^2(z) + sen^2(z) = 1$$

ou seja:

$$cos^2(z) + sen^2(z) = 1.$$

Mais uma vez usando a fórmula de Euler, vamos provar as transformações trigonométricas do seno e do cosseno da soma de dois complexos z e w, ou seja $sen(z + w)$ e $cos(z + w)$. Do resultado de (5.3), temos que e^z e e^w

$$e^{iz} \cdot e^{iw} = e^{i(z+w)} \Rightarrow cos(z+w) + isen(z+w) = coszcosw - senzsenw + i(senzcosw + coszsenw)$$

associando os resultados reais com reais e os imaginários com imaginários, obteremos

$$sen(z+w) = sen(z)cos(w) + cos(z)sen(w)$$

$$cos(z+w) = cos(z)cos(w) - sen(z)sen(w)$$

5.1.3 Funções hiperbólicas

As funções hiperbólicas são funções relacionadas a exponencial natural. Quando as expressamos em variáveis complexas, obtemos essas funções por meio de combinações de e^z e e^{-z}. Chamamos essas funções de cosseno hiperbólico e seno hiperbólicos em função de uma variável complexa, que denotamos respectivamente por

$$coshz = \frac{e^z+e^{-z}}{2} \quad e \quad senhz = \frac{e^z-e^{-z}}{2}$$

Quando tomamos essas funções hiperbólicas em uma variável complexa também conseguimos relacioná-las com funções trigonométricas. Para isso devemos proceder da seguinte maneira, tomamos $cos(iz)$

$$cos(iz) = \frac{e^{iiz}+e^{-iiz}}{2} = \frac{e^z+e^{-z}}{2} = coshz$$

De modo análogo operamos para relacionar $sen(iz)$

$$sen(iz) = \frac{e^{iiz}-e^{-iiz}}{2i} = \frac{e^{-z}-e^{z}}{2i} = isenhz$$

Como vimos é possível provar a identidade trigonométrica em uma variável complexa. Ao relacionarmos as funções trigonométricas e hiperbólicas também podemos encontrar uma identidade hiperbólica semelhante. A partir da identidade trigonométrica, temos que:

$$cos^2(iz) + sen^2(iz) = 1$$

como sabemos que $cos(iz) = coshz$ e $sen(iz) = isenhz$ basta substituirmos essas expressões e teremos

$$cosh^2(z) + i^2 senh^2(z) = 1 \Rightarrow cosh^2(z) - senh^2(z) = 1$$

5.2 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

Chamamos de equação diferencial (ED) uma equação que envolve derivadas de uma ou mais variáveis dependentes, em função de uma ou mais variáveis independentes. Inicialmente vamos classifica-las por tipo.

Digamos que uma equação diferencial que envolve unicamente derivadas ordinárias de uma função desconhecida denotada por $y = y(x)$, relacionada a uma variável dependente e a uma única variável independente x, essa equação é chamada de equação diferencial ordinária (EDO), esse é uma caso particular de EDO, no entanto, suas variáveis dependentes podem ser mais de uma, já a variável independente deve ser única.

Exemplo 5.1

$$\frac{dy}{dx} - y = 0$$

$$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} = e^x$$

Existe outro tipo de ED. Consideremos uma equação diferencial que envolve as derivadas parciais da variável dependente $u(x,t)$, relacionada as variáveis independentes x e t, essa é uma equação diferencial parcial(EDP). Nesse caso pode se envolver um ou mais variáveis dependentes e uma ou mais variáveis independentes (ZILL; CULLEN, 2001))

As equações diferenciais também são classificadas por ordem da derivada de maior ordem que aparece na equação. De maneira geral uma EDO é representada pelo simbolismo

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0.$$

Vejamos um exemplo de EDO de segunda ordem

Exemplo 5.2

$$y'' + yy' = \ln x$$

Por fim, temos uma classificação fundamental de equações diferenciais. As ED´s podem ser lineares ou não. Dizemos que uma equação linear se pode ser escrita na forma

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + ... + a_n(x)y = g(t)$$

Essencialmente esse tipo de ED atende a duas condições: a variável dependente y e suas n-ésimas derivadas tem grau 1, e os n-ésimos coeficientes $a_n(x)$ dependem somente da variável independente x. Caso contrário a equação diferencial será considerada não-linear.

Trataremos de uma EDO em particular. Vamos escrever uma equação diferencial ordinária linear de segunda ordem

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x)$$

Dizemos que essa EDO linear é homogênea se $F(x) = 0$, então denotaremos do seguinte modo

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$$

A equação diferencial linear que queremos abordar têm as variáveis independentes a_0, a_1, a_2 constantes. Então temos que:

$$ay'' + by' + cy = 0 \tag{5.4}$$

Para os quais a, b e c são constantes.

As soluções para esse tipo de EDO são da forma $y = e^{rx}$, onde r é uma parâmetro a ser determinado. Como a exponencial dada resolve a equação (5.4), temos que $y = e^{rx}$, $y' = re^{rx}$ e $y'' = r^2e^{rx}$. Substituindo em (5.4), obtemos

$$(ar^2 + br + c)e^{rx} = 0.$$

Por ser uma exponencial $e^{rx} \neq 0$, logo para que a solução seja válida a expressão entre parênteses deve ser nula, ou seja

$$ar^2 + br + c = 0.$$

Esse equação é chamada de equação característica. Por se tratar de uma equação polinomial do segundo grau ela tem duas raízes. Portanto $y = e^{rx}$ é solução da EDO se r for uma raiz da equação quadrática. As raízes para r podem ser reais(distintas ou iguais) ou complexas conjugadas.

A fórmula de Euler e seu inverso multiplicativo são aplicadas para encontrar a solução da EDO linear homogênea quando temos raízes complexas conjugadas r_1 e r_2 da equação característica. Assumindo os valores $r_1 = \alpha + i\beta$ e $r_2 = \alpha - i\beta$ em suas representações algébricas. Portanto para e^{r_1x} e e^{r_2x}, temos:

$$e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x} \cdot e^{i\beta x} = e^{\alpha x}(cos(\beta x) + isen(\beta x)) \tag{5.5}$$

$$e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x} \cdot e^{-i\beta x} = e^{\alpha x}(cos(\beta x) - isen(\beta x)) \tag{5.6}$$

Para obtemos as soluções reais basta proceder da seguinte maneira: para a primeira solução, somamos (5.5) e (5.6) e dividimos o resultado por 2. Para a segunda solução, subtraímos (5.6) de (5.5) e dividimos o resultado por 2. Ou seja, $y_1 = \frac{(e^{(\alpha+i\beta)x} + e^{(\alpha-i\beta)x}}{2}$ e $y_2 = \frac{(e^{(\alpha+i\beta)x} - e^{(\alpha-i\beta)x}}{2}$. Daí temos

$$y_1 = e^{\alpha x}cos\beta x \quad e \quad y_2 = e^{\alpha x}cos\beta x \tag{5.7}$$

Desta forma concluímos que $y_1 = e^{\alpha x}cos\beta x$ e $y_2 = e^{\alpha x}cos\beta x$ são soluções particulares da EDO independentes e, portanto, a solução geral á a combinação lidenar y_1 e y_2. Ou seja,

$$y(x) = c_1e^{\alpha x}cos\beta x + c_2e^{\alpha x}sen\beta x$$

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Está monografia é direcionada para leitores de nível médio e de graduação. Trazendo uma linguagem simples, cujo objetivo principal é analisar a fórmula de Euler para exponencial em uma variável complexa e sua relação com outras funções. Podendo ser visto como um trabalho que fornece uma fragmentação do que é visto em análise em uma variável complexa, pois abrange a temática de funções complexas a partir das suas relações com a fórmula de Euler, caso o leitor deseje se aprofundar nesse conteúdo poderá consultar os autores (CARMO; WAGNER; MORGADO, 2005; FERNANDEZ; BERNANDEZ, 2008; MOLTER; NACHTIGALL; ZAHN, 2020).

No decorre deste trabalho notamos que foi abordado a bibliografia de Euler e o contexto histórico para o desenvolvimento da fórmula de Euler, com o intuito de possibilitar o entendimento da história da Matemática e sua importância na conceituação do tema abordado.

Conjuntamente, analisamos a fórmula de Euler para a exponencial complexa, o que possibilitou explicar como as funções trigonométricas e hiperbólicas se relacionam em uma variável complexa e mostrar a aplicabilidade da fórmula de Euler nas equações diferenciais ordinárias.

Logo, esse trabalho tem sua viabilidade ao ser desenvolvido por meio de pesquisa, a partir de uma interpretação de contribuições anteriores. Cada tópico desenvolvido abrange a fórmula de Euler, para que o leitor possa contemplar a beleza matemática vinculada a ela e entender sua importância na análise complexa que é uma assunto relevante na matemática pura e aplicada.

Por fim, esse trabalho possibilitou a análise do tema fórmula de Euler sob uma visão do seu uso em determinados assuntos matemáticos, que por sinal abrangem bem mais utilidades do que as mencionadas, o que dá margem para se prosseguir pesquisando sobre o tema em questão em áreas afins como análise complexa, equações diferenciais parciais e até em áreas que utilizam a Matemática, como a Física.

REFERÊNCIAS

ANTON, H.; BIVENS, I.; DAVIS, S. *Cálculo*. [S.l.: s.n.], 2014.

AVILA, G. S. de S. *Introdução a Análise matemática*. [S.l.: s.n.], 1999.

BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C.; MEADE, D. B. *Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno*. [S.l.: s.n.], 2020.

BOYER, C. B.; MERZBACH, U. C. *História da Matemática*. São Paulo, Brasil: Blucher, 2012.

CARMO, M. P. d.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C. d. O. *Trigonometria númeeros complexos*. 3. ed. [S.l.]: SBM, 2005.

EVES, H. *Introdução à história da matemática*. 5. ed. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2011.

FERNANDEZ, C. S.; BERNANDEZ, N. C. *Introdução às funções de uma variável complexa*. [S.l.: s.n.], 2008.

IEZZI, G. *Fundamentos de matemática elementar, 6: complexos, polinômios, equações*. 8. ed. São Paulo: Atual, 2013.

LAKATOS, E. M.; MARCONI, M. d. A. *Fundamentos de Metodologia Científica*. 5th. ed. São Paulo: Atlas, 2003.

LIMA, E. L. *Análise Real*. [S.l.: s.n.], 2012.

MOL, R. S. *Introdução à história da matemática*. Belo Horizonte: CAED-UFMG, 2013.

MOLTER, A.; NACHTIGALL, C.; ZAHN, M. *Trigonometria e números complexos: com aplicações*. [S.l.: s.n.], 2020.

REIS, A. S. d. *A Identidade de Euler e suas constantes [manuscrito]*. XLVII, 47 p. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Goiás, Goiânia, Brasil, 2019.

SILVA, A. d. *A Fórmula de Euler e a Mais Bela Identidade Matemática* $e^{i\pi} + 1 = 0$. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Campina Grande, Cuité, Brasil, 2022.

ZILL, D. G.; CULLEN, M. R. *Equações Diferenciais, Volume 1*. São Paulo: Pearson Makron Books, 2001.