

INSTITUTO FEDERAL

Sertão Pernambucano

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO SERTÃO

PERNAMBUCANO

CURSO DE LICENCIATURA EM FÍSICA

CAMPUS SERRA TALHADA

João Vítor Marques de Melo Sá

ANALISANDO O PÊNDULO SIMPLES COM O MÉTODO DE RUNGE-KUTTA

SERRA TALHADA-PE

2024

João Vítor Marques De Melo Sá

ANALISANDO O PÊNDULO SIMPLES USANDO O MÉTODO DE RUNGE-KUTTA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do curso de Licenciatura em Física do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Sertão Pernambucano, campus Serra Talhada como requisito parcial à obtenção do título de licenciado em Física, sob a orientação do Prof. Dr. Alessio T. B. Celeste.

SERRA TALHADA-PE

2024

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

S111 Sá, João Vítor Marques de Melo.

Analisando o pêndulo simples com o método de Runge-Kutta / João Vítor Marques de Melo
Sá. - Serra Talhada, 2024.
46 f. : il.

Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Física) -Instituto Federal de Educação,
Ciência e Tecnologia do Sertão Pernambucano, Campus Serra Talhada, 2024.
Orientação: Prof. Dr. Alessio Tony Batista Celeste.

1. Física. 2. Métodos numéricos. 3. Runge-Kutta. 4. Pêndulo simples. I. Título.

CDD 530

Gerado automaticamente pelo sistema Geficat, mediante dados fornecidos pelo(a) autor(a)

JOÃO VÍTOR MARQUES DE MELO SÁ

ANALISANDO O PÊNDBULO SIMPLES USANDO O MÉTODO DE RUNGE-KUTTA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do curso de Licenciatura em Física do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Sertão Pernambucano, campus Serra Talhada como requisito parcial à obtenção do título de licenciado em Física, sob a orientação do Prof. Dr. Alessio T. B. Celeste.

Aprovado em: 07/02/2024.

BANCA EXAMINADORA

Documento assinado digitalmente



ALESSIO TONY BATISTA CELESTE

Data: 16/02/2024 17:10:50-0300

Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Aléssio Tony Batista Celeste

IFSertãoPE – Campus Serra Talhada - Orientador

Documento assinado digitalmente



AIRTONELTON MAGALHAES DE SOUSA

Data: 16/02/2024 17:29:03-0300

Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Me. Airtonelton Magalhães de Sousa

IFSertãoPE – Campus Serra Talhada - Examinador Interno

**Marcelo George
Nogueira da Costa**
06075146474

Assinado digitalmente por Marcelo George
Nogueira da Costa:06075146474
DN: CN=Marcelo George Nogueira da Costa:
06075146474, OU=IFSERTAOPE - Instituto
Federal do Sertao Pernambucano, O=ICPEdu,
C=BR
Razão: Eu estou aprovando este documento
Localização:
Data: 2024.02.16 17:13:28
Foxit Reader Versão: 9.1.0

TAE. Me. Marcelo George Nogueira Da Costa

IFSertãoPE – Campus Serra Talhada - Examinador Interno

Documento assinado digitalmente



MARCIO PAZETTI

Data: 16/02/2024 18:42:09-0300

Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Marcio Pazetti

Universidade Federal do Vale do São Francisco – Campus Juazeiro - Examinador
Externo

AGRADECIMENTOS

Gostaria de dedicar este trabalho aos que tornaram possível a sua realização, pois sem o apoio, incentivo e presença de pessoas tão especiais, nada disso seria possível.

Primeiramente, expresso minha gratidão a Deus, pois Ele tem sido minha fortaleza, dando-me saúde, livramentos e coragem para prosseguir, mesmo diante das adversidades. Sua presença em minha vida tem sido a luz que me guia em cada passo.

Também quero agradecer à minha família por todo o suporte incondicional ao longo dessa jornada. Obrigado por acreditarem em mim mesmo quando eu duvidava de mim mesmo e por estarem ao meu lado em todas as decisões, incluindo as mais extremas, quando decidi me dedicar exclusivamente ao curso. Vocês foram o pilar que sustentou meu caminho, e sou grato por todo o amor e encorajamento que sempre me proporcionaram.

Aos meus amigos, meu sincero agradecimento pelos incentivos constantes e pela companhia durante todo o percurso. Suas palavras de encorajamento e apoio foram um combustível essencial para manter minha motivação em alta e superar desafios.

Por fim, agradeço ao meu professor Dr. Alessio pela orientação durante toda a construção deste trabalho. Sua dedicação, boa vontade e paciência foram fundamentais para o desenvolvimento do meu projeto. Suas orientações e ensinamentos enriqueceram significativamente o trabalho, e sou grato por toda a expertise que compartilhou comigo ao longo dessa jornada acadêmica.

A todos vocês, meu profundo agradecimento. Este trabalho é fruto não apenas do meu esforço, mas do apoio inestimável que recebi de cada um.

EPÍGRAFE

“A natureza não esconde seus segredos por malícia, mas sim por causa da própria altivez.”

(Albert Einstein)

RESUMO

Os métodos numéricos desempenham um papel fundamental na resolução de problemas matemáticos complexos, tornando-se ainda mais relevantes após a revolução dos computadores. Eles permitem aproximar soluções precisas para uma ampla gama de problemas, sendo particularmente úteis na resolução de equações diferenciais de primeira ordem. Neste trabalho, exploramos a aplicação do método de Runge-Kutta na resolução do pêndulo simples amortecido, com foco em ângulos de oscilação considerados grandes. O pêndulo simples é um sistema físico amplamente estudado, cujo comportamento pode ser descrito por uma equação diferencial de segunda ordem. No entanto, quando introduzimos o amortecimento, a resolução analítica se torna complexa ou impossível, tornando os métodos numéricos uma ferramenta valiosa. O método de Runge-Kutta é uma técnica numérica que nos permite obter aproximações precisas das soluções reais para equações diferenciais. A escolha do método de Runge-Kutta apropriado depende da natureza do problema e das precisões desejadas. Para conduzir nossa pesquisa, utilizamos o software Mathematica®, que é uma poderosa ferramenta de computação simbólica e numérica. O Mathematica® nos permitiu implementar o método de Runge-Kutta de maneira eficiente e obter resultados numéricos confiáveis para o pêndulo simples amortecido com grandes ângulos de oscilação. Nossos resultados demonstram a eficácia do Método de Runge-Kutta na solução desse problema complexo e fornecem uma compreensão mais profunda do comportamento do pêndulo simples em condições de amortecimento e ângulos de oscilação substanciais. Esta pesquisa contribui para o campo da física teórica e para a aplicação prática de métodos numéricos na resolução de problemas do mundo real. Além disso, destaca a importância do software Mathematica® como uma ferramenta valiosa para a análise numérica em ciência.

Palavras-chave: métodos numéricos; Runge-Kutta; pêndulo simples.

ABSTRACT

Numerical methods play a fundamental role in solving complex mathematical problems, becoming even more relevant after the computer revolution. They allow us to approximate precise solutions for a wide range of problems, being particularly useful in solving first-order differential equations. In this work, we explore the application of the Runge-Kutta method to solve the simple damped pendulum, focusing on oscillation angles considered large. The simple pendulum is a widely studied physical system, whose behavior can be described by a second-order differential equation. However, when we introduce damping, analytical resolution becomes complex or impossible, making numerical methods a valuable tool. The Runge-Kutta method is a numerical technique that allows us to obtain accurate approximations of real solutions to differential equations. The choice of the appropriate Runge-Kutta method depends on the nature of the problem and the desired accuracies. To conduct our research, we used Mathematica® software, which is a powerful symbolic and numerical computing tool. Mathematica® allowed us to implement the Runge-Kutta method efficiently and obtain reliable numerical results for the simple damped pendulum with large oscillation angles. Our results demonstrate the effectiveness of the Runge-Kutta Method in solving this complex problem and provide a deeper understanding of simple pendulum behavior under damping conditions and substantial oscillation angles. This research contributes to the field of theoretical physics and the practical application of numerical methods in solving real-world problems. Furthermore, it highlights the importance of Mathematica® software as a valuable tool for numerical analysis in science.

Keywords: numerical methods; Runge-Kutta; simple pendulum.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1- Método de Euler x Runge kutta	14
Figura 2- Gráfico da função cosseno	20
Figura 3- Gráfico da função seno	20
Figura 4- Representação do período	21
Figura 5- Representação da fase	21
Figura 6- Pêndulo simples	22
Figura 7- Forças atuantes no pêndulo	23
Figura 8- Decomposição de forças atuantes no pêndulo	23
Figura 9- Diagrama de fase para o pêndulo simples sob grandes oscilações	26
Figura 10- Sistema massa-mola com amortecedor	27
Figura 11- Forças atuantes no bloco	28
Figura 12- Amortecimento supercrítico	31
Figura 13- Amortecimento crítico	31
Figura 14- Amortecimento subcrítico	32
Figura 15- Pêndulo do Exemplo 3.3	34
Figura 16- Solução numérica amortecimento subcrítico	37
Figura 17- Solução numérica amortecimento crítico	38
Figura 18- Solução numérica amortecimento supercrítico	38
Figura 19- Os três casos de amortecimento	39

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	11
2	MÉTODOS DE RUNGE–KUTTA	14
2.1	Runge-Kutta de Primeira Ordem (RK-1).....	15
2.2	Runge-Kutta de Segunda Ordem (RK-2)	15
2.3	Runge-Kutta de Quarta Ordem (RK-3).....	16
2.4	Runge-Kutta de Quarta Ordem (RK-4).....	16
3	MOVIMENTO HARMÔNICO SIMPLES (M. H. S.).....	18
3.1	Pêndulo Simples	22
3.2	Simulação Numérica de grandes Oscilações em um Pêndulo Simples usando o Método de Runge-Kutta	25
4	MOVIMENTO HARMÔNICO AMORTECIDO.....	27
5	PÊNDULO CRITICAMENTE AMORTECIDO.....	34
5.1	Amortecimento subcrítico.....	36
5.2	Amortecimento crítico.....	37
5.3	Amortecimento supercrítico	38
6	CONCLUSÃO	40
	REFERÊNCIAS.....	41
	APÊNDICE A- PROCESSO DE CONSTRUÇÃO DO TERCEIRO TERMO DA EQUAÇÃO 68.....	42
	APÊNDICE B- APLICAÇÃO DO RK-4 PARA A EQUAÇÃO 41	43
	APÊNDICE C - CÓDIGO DO PÊNDULO COM AMORTECIMENTO SUBCRÍTICO	44
	APÊNDICE D - CÓDIGO DO PÊNDULO COM AMORTECIMENTO CRÍTICO.....	45
	APÊNDICE E - CÓDIGO DO PÊNDULO COM AMORTECIMENTO SUPERCRÍTICO.....	46

1 INTRODUÇÃO

Os Métodos Numéricos procuram desenvolver processos de cálculo (algoritmos) utilizando uma sequência finita de operações aritméticas básicas, de forma a que certos problemas matemáticos se tornem executáveis. Estes algoritmos envolvem, em geral, um grande número de cálculos aritméticos. Não é pois de estranhar que, nas últimas décadas, com o rápido crescimento das potencialidades dos computadores digitais, o papel dos Métodos Numéricos na resolução de problemas complexos tenham sofrido grande incremento [12].

Esses métodos são especialmente importantes quando se tratam de resolver questões diferenciais, integrar funções complexas, atualizar sistemas e simular características físicas ou processos de engenharia. Ao utilizar algoritmos que operam sobre dados numéricos, os Métodos Numéricos convertem abstrações matemáticas em processos práticos, viabilizando a análise e a resolução de problemas que, de outra forma, seriam inacessíveis ou demandariam recursos computacionais excessivos. A evolução tecnológica das tecnologias digitais tem impulsionado a eficácia e a aplicabilidade desses métodos, permitindo abordagens mais precisas e rápidas na resolução de desafios complexos enfrentados por cientistas. Encontrar soluções numéricas aproximadas dos mais variados problemas complexos encontrados no mundo real, por meio de aplicações de algoritmos, que possibilitam elaborar e calcular operações matemáticas usando sequências de operações aritméticas mais simples.

“A análise numérica idealiza e concebe métodos para aprovar de forma eficiente as soluções de problemas expressados matematicamente” [9]. Ademais, não apenas facilita a resolução de problemas práticos, mas também possibilita o aprimoramento contínuo e a inovação em diversas áreas, impulsionando o avanço tecnológico e científico. À medida que os recursos computacionais evoluem, os Métodos Numéricos acompanham esse ritmo, permitindo abordagens cada vez mais precisas e eficientes na obtenção de soluções para desafios complexos da realidade.

Os métodos numéricos são aplicações de algoritmos pelas quais é possível formular e resolver problemas matemáticos usando operações aritméticas menos complexas [1]. Segundo Chapra e Canale, são técnicas criadas para resolver problemas matemáticos, de forma a serem solucionados com cálculos aritméticos [10]. A resolução de equações diferenciais rege um papel fundamental para toda a física, uma vez que as equações que descrevem a natureza ao nosso redor ou são trivialmente simples ou são impossíveis de se resolverem analiticamente.

Muitas das que possuem solução ou não condizem com a verdadeira física do problema ou servem apenas de pontapé inicial para o estudo de um determinado assunto, sobrando uma quantidade restrita de Equações Diferenciais Ordinárias (EDO's) com uma aplicação direta [7].

Ao utilizar algoritmos e técnicas elaboradas, é possível traduzir problemas abstratos em cálculos e operações mais simples, permitindo a análise e a solução de desafios complexos que permeiam diversas áreas do conhecimento. O destaque recai sobre a resolução de equações diferenciais, uma vez que essas equações desempenham um papel crucial na modelagem de características físicas e naturais. Dada a sua complexidade, muitas vezes é inviável ou mesmo impossível obter soluções analíticas diretas para essas questões, tornando os métodos numéricos a abordagem mais viável e eficaz para encontrar soluções aproximadas. Essa capacidade de superar e solucionar problemas que escapam à análise puramente matemática amplia consideravelmente as possibilidades de compreensão e intervenção no mundo real, impulsionando avanços científicos e tecnológicos.

O avanço da matemática e da tecnologia tornou possível o que antes parecia improvável: a resolução de equações diferenciais através de computadores com os chamados 'Métodos Numéricos'. Os resultados obtidos através desses métodos estão limitados, hoje, à capacidade das máquinas, que estão cada vez mais precisas e velozes [7].

O século XVII marcou um período de notáveis progressos na matemática, impulsionados principalmente pela abertura de novas áreas de pesquisa. Contudo, o feito mais significativo desse período foi a criação do cálculo diferencial e integral, também conhecido como cálculo infinitesimal. Este avanço inovador foi desenvolvido de maneira independente por Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Leibn. De acordo com Eves, "... com essa invenção a matemática criativa passou a um plano superior e a história da matemática elementar essencialmente terminou", e complementa, dizendo que os conceitos principais do cálculo "... têm tanto alcance e tantas implicações no mundo moderno que talvez seja correto dizer que sem algum conhecimento deles dificilmente hoje uma pessoa poderia considerar-se culta "[4].

A solução de uma equação diferencial pode ser abordada de três maneiras diferentes: a analítica, a qualitativa e a numérica. Num primeiro momento de estudo de Equações Diferenciais, geralmente, é dada prioridade a este processo analítico na busca da solução de uma equação diferencial via processo de integração. Aqui, já começa a ficar claro que por este processo analítico não é sempre possível encontrar a solução de todas as equações diferenciais, pois, como já sabemos, existem muitas funções que não podem ser expressas em termos de funções elementares [13]. Assim, nem todo problema encontra uma representação apropriada por meio de métodos de integração.

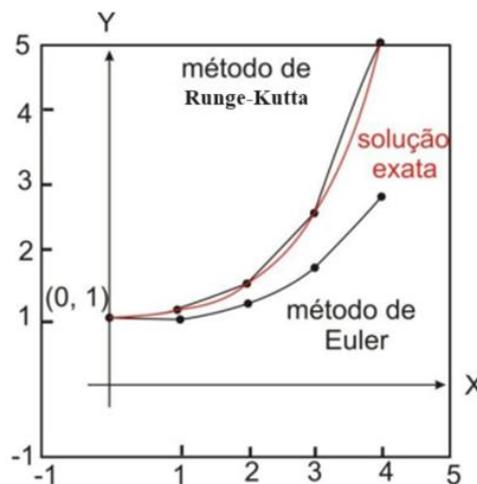
Por outro lado, ao adotar uma abordagem qualitativa, explora-se o comportamento geométrico das soluções, analisando os aspectos das curvas integrais por meio de campos de direção. Esse procedimento, no estudo das equações diferenciais ordinárias de 1ª ordem, é baseado na interpretação da derivada. Finalmente, na abordagem numérica, métodos numéricos são utilizados para aproximar soluções de problemas de valor inicial (P.V. I) de equações diferenciais de 1ª ordem. Os procedimentos numéricos podem ser executados, em computadores e, também, em algumas calculadoras. Idealmente, os valores aproximados da solução serão acompanhados de cotas para os erros que garantem um nível de precisão para aproximações. Existem muitos métodos, hoje em dia, que produzem aproximações numéricas de soluções de equações diferenciais [13].

2 MÉTODOS DE RUNGE-KUTTA

O método de Runge-Kutta desenvolvido por Carl David Tolmé Runge e Martin Wilhelm Kutta no começo dos anos de 1900 [2], é um dos métodos mais populares, sendo o de quarta ordem um dos mais precisos para obter soluções aproximadas de valor inicial. Cada método consiste em comparar um polinômio de Taylor apropriado para eliminar o cálculo das derivadas, fazendo-se várias avaliações da função f a cada passo. Estes métodos podem ser construídos para qualquer ordem α [13].

Isso ocorre devido à sua simplicidade e precisão, muito próximo dos métodos de Taylor. A diferença crucial é sua vantagem em evitar ordens de derivadas elevadas. Essas resoluções de derivadas mais altas não são apenas extremamente complicadas, mas também exigem um mega esforço computacional. O gráfico abaixo destaca a eficácia do método Runge-Kutta em comparação com o método de Euler, evidenciando, por conseguinte, a precisão da solução exata.

Figura 1 - Método de Euler x Runge kutta



Fonte: [13]

Se uma função $y(x)$ possui $k + 1$ derivadas contínuas em um intervalo aberto que inclui a e x , então é possível expressá-lo através do polinômio de Taylor com resto.

$$y(x) = y(a) + y'(a) \frac{x - a}{1!} + \dots + y^{(k)}(a) \frac{(x - a)^k}{k!} + y^{k+1}(c) \frac{(x - a)^{(k+1)}}{(k + 1)!} \quad (1)$$

Onde c é algum número entre a e x .

É um método que se apoia na avaliação da função em pontos específicos, por sua vez, capturaram as virtudes do método de série de Taylor, simplificando o processo para evitar a necessidade de calcular derivadas diretamente.

E eles têm três propriedades principais:

1. São de passo 1;
2. Não precisa calcular derivada, No lugar, calcula-se $f(x,y)$ ou $f(t, y)$;
3. A fórmula do método concorda com a do método de série de Taylor até os termos da ordem do método.

Através da propriedade 3, é possível observar que este método apresenta diversas ordens.

2.1 Runge-Kutta de Primeira Ordem (RK-1)

O método de Runge-Kutta de primeira ordem é caracterizado por sua simplicidade. Ele requer poucas parâmetros para serem determinados, alinhando-se com os métodos de Euler e Taylor de ordem 1.

A expansão de uma função em série de Taylor de primeira ordem fica assim:

$$y_{n+1} = y_n + h_y' y_n \quad (2)$$

Como mencionado anteriormente, a distinção entre o método de Runge-Kutta (RK) e a expansão de uma função em série de Taylor reside no fato de que no RK nós substituímos o derivada por $f(t_n, y_n)$:

$$y_{n+1} = y_n + h_f(t_n, y_n) \quad (3)$$

O método de Euler representado pela (equação 3) é um método de primeira ordem, o que significa que a precisão da solução é proporcional ao tamanho do passo utilizado. Quanto menor o passo, mais precisa será a solução, mas isso implica em mais cálculos. O método de Runge-Kutta, por outro lado, pode ser implementado em diferentes ordens, como RK2, RK3, RK4, etc. O RK4 é especialmente usado, por ser um método de quarta ordem, que proporciona uma precisão muito maior em comparação com o método de Euler [2].

2.2 Runge-Kutta de Segunda Ordem (RK-2)

Os métodos de Runge-Kutta de segunda ordem seguem a seguinte fórmula geral:

$$y_{n+1} = y_n + h_{\alpha_1} f(t_n, y_n) + h_{\alpha_2} f(t_n + h \beta_1, y_n + h \beta_2 f(y_n, t_n)) \quad (4)$$

Substituindo: $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{2}$ e $\beta_1 = \beta_2 = 1$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} [f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_n + hf(t_n, y_n))] \quad (5)$$

A expressão (5) lembra o método de Euler aperfeiçoado (também chamado de Método de Euler Modificado) foi desenvolvido nos anos de 1770, e é mais preciso do que o método de Euler [2]. Seguindo essas condições abaixo, existem infinitos métodos além do de Euler Aperfeiçoado que são métodos de Runge-Kutta de 2ª ordem.

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 1 \\ \alpha_2 \cdot \beta_1 = \frac{1}{2} \\ \alpha_1 \cdot \beta_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

É importante comentarmos que a ordem do método aponta o número de pontos usados em um subintervalo para designar o valor da inclinação, isto significa que, o RK-2 utiliza a inclinação em dois pontos, o método RK-3 emprega três pontos e o RK-4 terá quatro pontos [5].

2.3 Runge-Kutta de terceira ordem (RK-3)

Há métodos de Runge-Kutta disponíveis para qualquer ordem desejada. A complexidade computacional torna-se mais exigida após a 4ª ordem, sendo de suma importância uma abordagem cuidadosa na reescrita de algoritmos.

$$y_{n+1} = y_n + \frac{2}{9}k_1 + \frac{1}{3}k_2 + \frac{4}{9}k_3 \quad (6)$$

$$k_1 = h_f(t_n, y_n) \quad (7)$$

$$k_2 = h_f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right) \quad (8)$$

$$k_3 = h_f\left(t_n + \frac{3}{4}h, y_n + \frac{3}{4}k_2\right) \quad (9)$$

2.4 Runge-Kutta de Quarta Ordem (RK-4)

Esse é o método que usaremos para solucionar de forma numérica os problemas ligados ao pêndulo simples.

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (10)$$

$$k_1 = h_f(t_n, y_n) \quad (11)$$

$$k_2 = h_f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right) \quad (12)$$

$$k_3 = h_f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}\right) \quad (13)$$

$$k_4 = h_f(t_n + h, y_n + k_3) \quad (14)$$

A complexidade computacional aumenta significativamente após a 4ª ordem, exigindo uma abordagem cuidadosa na reescrita de algoritmos. A medida que aumentamos a ordem, adicionamos termos ao algoritmo. Uma abordagem prática seria tomar o algoritmo do Método de Euler Aperfeiçoado e ajustar apenas a função de iteração, adicionando os termos necessários.

O RK-4 é comumente usado para resolver equações diferenciais de primeira ordem, mas destaco que é possível empregar esse método na resolução de equações diferenciais de segunda ordem, convertendo-as em um sistema composto por duas equações diferenciais de primeira ordem. Essa transformação é realizada pela introdução de uma variável adicional, $z = \frac{dy}{dx}$.

É fundamental destacar que a ordem do método de Runge-Kutta indica o número de pontos utilizados em um subintervalo para determinar a inclinação. No contexto do RK-4, quatro pontos são empregados, porém ao lidar com duas Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs) de primeiro grau, advindas da conversão de uma EDO de segunda ordem em um sistema de duas EDOs de primeira ordem. É crucial notar que nos apêndices estão presentes oito termos, evidenciando a complexidade inerente ao método quando aplicado a sistemas de equações diferenciais de segunda ordem.

3 MOVIMENTO HARMÔNICO SIMPLES (M. H. S.)

Movimento harmônico é caracterizado por um movimento oscilatório, onde algumas propriedades se repetem ao longo do tempo, como a posição $x(t)$, velocidade $v(t)$, aceleração $a(t)$, entre outras. A estrutura de um movimento harmônico é sempre expressa por funções seno ou cosseno, sendo essas funções responsáveis pela geração das recorrências. Por exemplo:

$$x(t) = 2 \cos(3t) \quad (15)$$

$$y(t) = \sin(t) \quad (16)$$

Movimento harmônico simples refere-se a um movimento harmônico desprovido de atrito. Há também os Movimentos Harmônicos Amortecidos (MHAs). A equação do Movimento Harmônico Simples pode ser expressa por uma função seno ou cosseno, e, de modo geral, pode ser representada por:

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi) \text{ ou } x(t) = A \sin(\omega t + \varphi) \quad (17)$$

Nessa equação, temos:

A : Representa a amplitude do movimento.

ω : Representa a frequência angular.

φ : Representa a fase do movimento.

Que significam:

A : É o maior “afastamento” possível que o objeto que está executando o MHS pode ter da origem.

φ : É o ângulo inicial do movimento. Tem a ver com a posição inicial do objeto.

ω : É uma espécie de velocidade angular. É dada em rad/s .

A expressão geral para ela é:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \quad (18)$$

No qual T é o período do movimento, ou seja, o tempo de um ciclo total. A frequência é o inverso do período:

$$f = \frac{1}{T} \quad (19)$$

Por essa relação fica claro que a frequência determina o número de voltas que o corpo dá em unidades de tempo. A unidade de medida da frequência no Sistema Internacional de unidades (SI) é o Hz [15].

Para um Movimento Harmônico Simples (MHS), as equações para a velocidade (v) e a aceleração (a) podem ser obtidos por meio de derivação

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi) \quad (20)$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = -\omega A \sin(\omega t + \varphi) \quad (21)$$

$$v(t) = -\omega A \sin(\omega t + \varphi) \quad (22)$$

Devido à variação do seno entre -1 e +1, a velocidade alcança seu valor máximo. O objeto oscila entre as velocidades ωA e $-\omega A$:

$$v_{max} = \omega A \quad (23)$$

Para a aceleração, derivamos outra vez:

$$\frac{dv(t)}{dt} = -\omega^2 A \cos(\omega t + \varphi) \quad (24)$$

A aceleração máxima é:

$$a_{max} = \omega^2 A \quad (25)$$

Defasagem entre a velocidade e aceleração

Aqui pode-se ver que existe uma defasagem entre as funções seno e cosseno.

Exemplo: Quando $\cos(0) = 1$, temos que $\sin(0) = 0$. Ou quando $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, temos que $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

Isso quer dizer que as funções estão defasadas por $\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

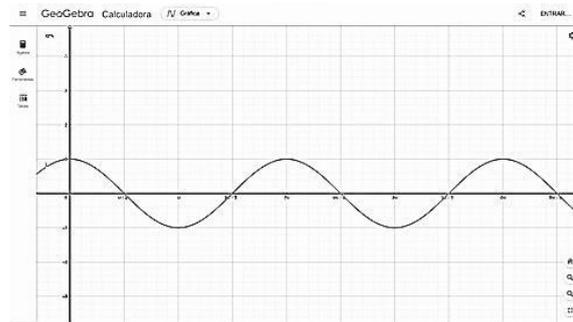
Acontece com a velocidade e com a aceleração:

Quando a aceleração for máxima, a velocidade será mínima (zero).

Quando a velocidade for máxima, a aceleração será mínima (zero).

Posição e fase do MHS

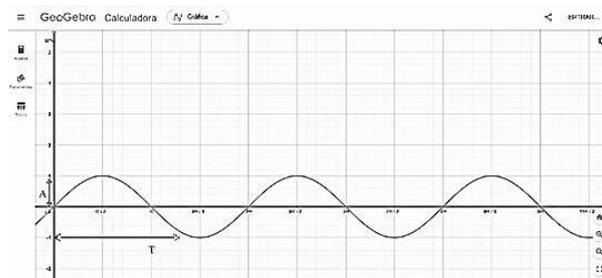
Figura 2 - Gráfico da função cosseno



Fonte: Geogebra

O gráfico representa uma função cosseno, onde o valor atinge 1 quando o argumento é zero, começando no valor máximo na origem, e atinge -1 quando o argumento é π . É fundamental destacar que, ao traçar o gráfico para um MHS na representação posição x tempo, os gráficos podem ser um pouco distintos devido à dependência do argumento da função em outros fatores.

Figura 3 - Gráfico da função seno



Fonte: Geogebra

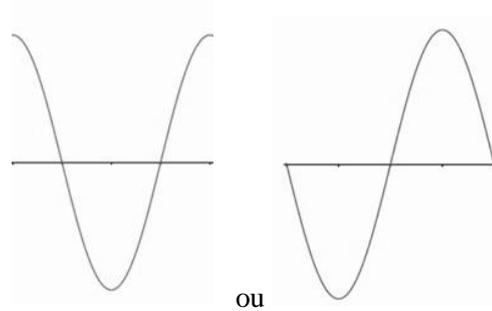
O gráfico de uma função seno tem valor 1, quando o argumento da função é $\frac{\pi}{2}$, e valor 0 quando o argumento é 0 ou $-\pi$. Na figura 3, temos uma marcação: A. Essa é a nossa amplitude maior distância atingida em x.

Período

O período MHS representa o intervalo de tempo necessário para que o sistema complete

um ciclo completo de oscilação. Durante esse ciclo, os gráficos da função cosseno que descreve a posição em relação ao tempo podem assumir uma das duas formas típicas, dependendo das condições iniciais e da natureza do sistema:

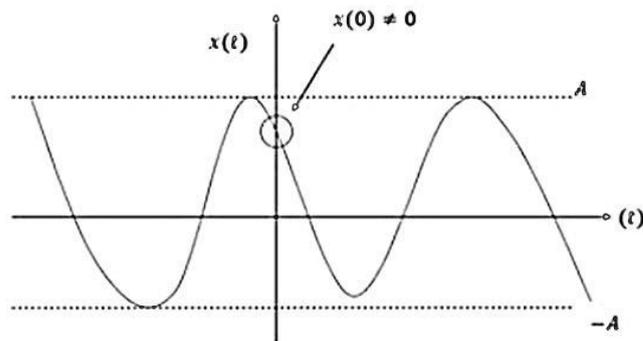
Figura 4 - Representação do período



Fonte: autoria Própria

Fase

Figura 5 - Representação da fase



Fonte: autoria Própria.

Caso o gráfico não comece no 0 ou na amplitude, teremos uma constante de fase φ diferente de 0. Então, se a função for do tipo:

$$A(t) = A \cos(\omega t + \varphi) \quad (26)$$

E o valor em $t = 0$ for A_0 , o ideal é fazer:

$$x(0) = A \cos(\varphi) = A_0 \quad (27)$$

$$\cos(\varphi) = \frac{A_0}{A} \quad (28)$$

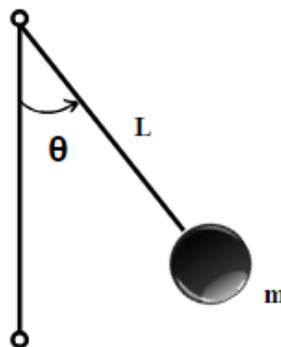
E assim descobriremos o valor da nossa constante de fase.

$$\varphi = \arccos\left(\frac{A_0}{A}\right) \quad (29)$$

3.1 Pêndulo Simples

O formato padrão de um pêndulo simples é caracterizado pelo movimento harmônico, no qual a posição do pêndulo varia em relação ao tempo, geralmente oscila de um lado para o outro em torno de sua posição de equilíbrio, alcançando pontos máximos (amplitude) e passando pela posição de equilíbrio no decorrer de seu movimento. Em mecânica, um pêndulo simples é um instrumento que consiste em um corpo de determinada massa, preso a um fio inextensível e sem peso que oscila em torno de um ponto fixo [8].

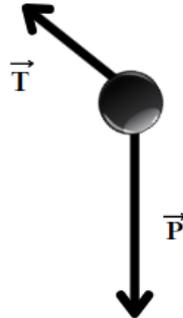
Figura 6 - Pêndulo simples



Fonte: autoria própria

Para representar matematicamente a dinâmica do movimento do pêndulo simples, recorreu-se ao conhecimento prévio sobre as deduções de EDOs lineares, usando dados e parâmetros físicos do próprio pêndulo. A solução será obtida seguindo técnicas matemáticas específicas para este tipo de equação [14]. Com a finalidade de chegar à EDO que descreve esse movimento, iniciamos com o diagrama de corpo livre e a identificação das forças atuantes. Isolando a massa, temos o seguinte:

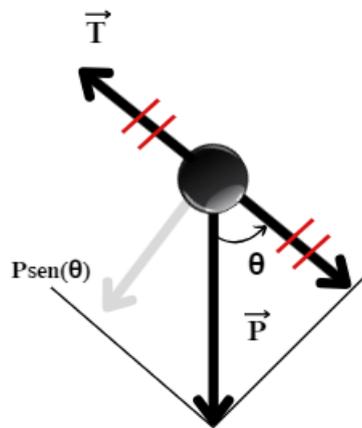
Figura 7 - Forças atuantes no pêndulo



Fonte: autoria própria

Determinar a força resultante, como não há movimento na direção do fio, podemos decompor o peso nessa direção e na direção do movimento, perpendicular.

Figura 8 - Decomposição de forças atuantes no pêndulo



Fonte: autoria própria

A força resultante pode ser expressa como:

$$F_R = P \cdot \text{sen } \theta \quad (30)$$

Aplicando a Segunda Lei de Newton para rotações:

$$\tau = -L(P \text{ sen}(\theta)) \quad (31)$$

Analisando a equação (31), temos que, L é o comprimento do fio e a distância da massa até o centro de rotação e $P \text{ sen}(\theta)$ faz o pêndulo rotacionar, é nítido que $P \text{ sen}(\theta)$ é perpendicular ao fio. Esse sinal negativo vem do fato de que o torque vai sempre querer levar a massa para posição mais baixa (quando o fio ficar vertical).

Por outro lado, a segunda lei para rotações diz que:

$$\tau = I\alpha \quad (32)$$

Assim

$$I\alpha = -LP \text{ sen}(\theta) \quad (33)$$

Só que $\alpha = \ddot{\theta}$

$$I\ddot{\theta} = -LP \text{ sen}(\theta) \quad (34)$$

E o momento de inércia da massa em relação ao eixo de rotação é $I = mL^2$

$$mL^2\ddot{\theta} = -LP \text{ sen}(\theta) = -Lmg \text{ sen}(\theta) \quad (35)$$

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{L} \text{ sen}(\theta) \quad (36)$$

Mas para pequenos valores de θ : **$\text{sen } \theta \approx \theta$**

Observação: apareceu um seno, só falar que o ângulo é pequeno e substitui o seno pelo próprio ângulo. Então:

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{L} \theta \quad (37)$$

A partir disso vamos chegar na equação do MHS:

$$\ddot{\theta} + \omega^2 \theta = 0 \quad (38)$$

Então:

$$\omega^2 = \frac{g}{L} \quad (39)$$

$$\text{Assim, o período vai ser dado por: } \omega = \sqrt{\frac{g}{L}} \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{g}{L}} \quad (40)$$

Para grandes valores não aproximamos: **$\text{sen } \theta \approx \theta$** .

$$\ddot{\theta} + \omega^2 \sin \theta = 0 \quad (41)$$

Essa última equação (41) desempenha um papel significativo no norteamento do trabalho, no próximo tópico, abordaremos a obtenção do diagrama de fase, que representa o comportamento do pêndulo simples sobre grandes ângulos de oscilação. Este diagrama fornecerá uma visão abrangente da dinâmica do sistema, enriquecendo ainda mais nossa compreensão do fenômeno em estudo.

O período vai variar somente com o comprimento e com a gravidade do local.

A solução da EDO Eq. 38 é a mesma do MHS:

$$\theta(t) = \theta_{max} \cos(\omega t + \phi) \quad (42)$$

A forma mais simples de oscilação, o movimento harmônico simples (MHS), é o movimento que ocorre quando numa trajetória retilínea, uma partícula oscila periodicamente em torno de uma posição de equilíbrio sob a ação de uma força restauradora, sempre orientada para a posição de equilíbrio e de intensidade proporcional à distância da partícula à posição de equilíbrio.[14]. Qualquer movimento que se repete em intervalos de tempo iguais constitui um movimento periódico, que pode sempre ser expresso em função de senos e cossenos, motivo pelo qual ele é também denominado movimento harmônico [6].

3.2 Simulação Numérica de grandes Oscilações em um Pêndulo Simples usando o Método de Runge-Kutta

Evidentemente, o pêndulo simples apresenta uma solução analítica para pequenos ângulos. Esse sistema mecânico é constituído por uma massa pontual presa a um fio (que não contribui significativamente com massa ao sistema), que realiza oscilações em torno de um ponto de equilíbrio sob a influência da força da gravidade. A inovação diferencial que descreve o movimento desse pêndulo é conhecida como a Equação Diferencial do Pêndulo. Essa descoberta, pode ser resolvida de forma analítica por meio da aplicação de técnicas matemáticas avançadas, como a expansão em série de Taylor ou o método das pequenas oscilações.

O método de Runge-Kutta é uma técnica numérica que permite a resolução de equações diferenciais, como as equações de movimento do pêndulo, aproximando a solução passo a passo. A solução depende do número de passos e do tamanho dos passos escolhidos. Quanto

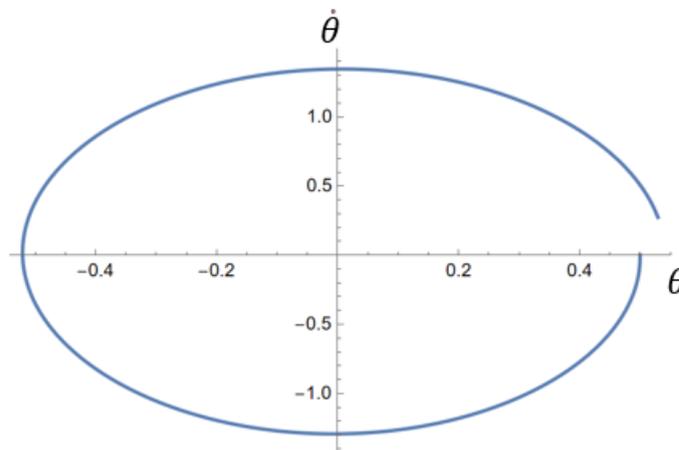
mais passos foram utilizados, mais precisa será a solução obtida.

Quando as amplitudes de oscilação do pêndulo simples são grandes, o comportamento do gráfico será significativamente diferente em comparação com oscilações pequenas. Para grandes amplitudes, o pêndulo não pode mais ser tratado como um oscilador harmônico simples, e as equações de movimento não têm soluções analíticas simples.

Em geral, para grandes oscilações, é difícil obter soluções analíticas para as equações de movimento do pêndulo simples, e métodos numéricos, como o método de Runge-Kutta, são frequentemente utilizados para obter aproximações.

De acordo com os pontos discutidos, a EDO que representa a oscilação grande é (41) segue representação gráfica e o código-fonte utilizado para gerar o gráfico esta descrito no (APÊNDICE B).

Figura 9 - diagrama de fase para o pêndulo simples sob grandes oscilações



Fonte: autoria própria

O diagrama de fase gerado pelo Wolfram Mathematica®, para o pêndulo simples sob grandes ângulos de oscilação apresenta ciclos limites com trajetórias fechadas de formato elíptico. Essa representação é característica do comportamento periódico e estável do sistema, mesmo em amplitudes de oscilação significativas. As trajetórias elípticas indicam que o sistema oscila em torno de pontos fixos no espaço de fase, demonstrando um comportamento coerente e repetitivo. Esses ciclos limites são importantes, pois representam soluções estáveis e previsíveis do sistema, independentemente das condições iniciais.

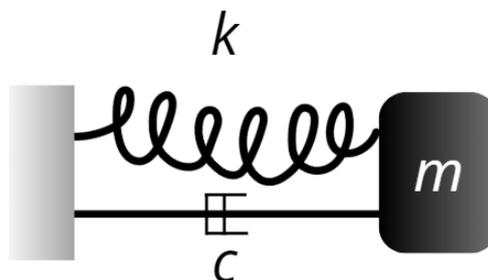
4 MOVIMENTO HARMÔNICO AMORTECIDO

A diferença essencial em relação ao Movimento Harmônico Simples (MHS) reside no fato de que, neste caso, o sistema sofre a influência do atrito. O acrônimo MHA denota o Movimento Harmônico Amortecido. Conseqüentemente, uma característica notável é que o sistema não perpetua sua oscilação indefinidamente (não fica oscilando para sempre), com o passar do tempo, a força de atrito retira gradualmente energia do sistema até ele parar. Sob tais circunstâncias, é importante destacar que a energia mecânica do sistema não se conserva.

Equação do MHA

Agora é necessário incorporar à Segunda Lei de Newton a presença da força de atrito. Vamos examinar o exemplo do sistema massa-mola.

Figura 10 - Sistema massa-mola com amortecedor



Fonte: autoria própria

Note que, nesta situação, além da presença da mola com constante elástica k , também temos um amortecedor com constante de amortecimento C .

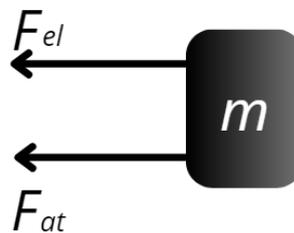
Além do amortecedor, há outros elementos que podem ocasionar atrito no sistema. Se o bloco estiver imerso em um fluido viscoso, por exemplo, a força de atrito seria resultante da resistência que o líquido impõe ao movimento do bloco. Outro cenário seria uma mola vertical, onde um disco acoplado à massa sujeitaria a influência da resistência do ar, gerando uma força de atrito. No entanto, em todos esses casos, o cálculo da força de atrito segue o mesmo princípio.

$$F_{at} = -cv \quad (43)$$

Onde v é a velocidade. Assim como a força elástica é sempre contrária à posição, a força de amortecimento (atrito) também é.

Mas atrito não era $F_{at} = \mu N$? Sim. No entanto, neste caso, estamos abordando atritos viscosos, que são sempre calculados dessa forma. O atrito mencionado anteriormente é conhecido como atrito seco. Ao isolar o bloco e analisar as forças atuantes nele, obtemos:

Figura 11 - Forças atuantes no bloco



Fonte: autoria própria

Então a força resultante é:

$$F_R = F_{el} + F_{at} \quad (44)$$

$$F_{at} = -cv \quad \text{e} \quad F_{el} = -kx$$

Observação: você também poderia dizer que $F_R = -F_{el} - F_{at}$, mas aí teria que, $F_{at} = cv$ e $F_{el} = kx$

Substituindo na Segunda Lei de Newton:

$$F_R = ma \quad (45)$$

$$-cv - kx = ma \quad (46)$$

Mas $a = \ddot{x}$ e $v = \dot{x}$

Então :

$$-C\dot{x} - kx = m\ddot{x} \quad (47)$$

Logo:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \quad (48)$$

Essa é a equação do MHA, os coeficientes são sempre positivos, caso se tenha algum negativo, ao examinarmos as forças presentes no sistema, é crucial nos atentarmos para a orientação dos sinais, seguindo a abordagem já utilizada no Movimento Harmônico Simples (MHS). A singularidade aqui reside na introdução de um termo adicional na equação, em comparação com o MHS convencional. Sob a premissa de atrito nulo, a equação resultante coincide com a do MHS. Dessa forma, teremos uma EDO de segunda ordem homogênea, cuja resolução requer a análise da equação auxiliar correspondente:

$$mr^2 + cr + k = 0 \quad (49)$$

Dividindo todo mundo por m:

$$r^2 + \frac{c}{m}r + \frac{k}{m} = 0 \quad (50)$$

Agora, chamando $\frac{c}{m} = \gamma$ e $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ e , vamos calcular o Δ dessa equação:

$$\Delta = b^2 - 4ac = \gamma^2 - 4.1 \cdot \omega_0^2 \quad (51)$$

E então temos três possibilidades:

$$\Delta > 0; \Delta = 0; \Delta < 0$$

Em cada caso, temos uma solução diferente, então vamos analisar cada uma dessas possibilidades.

Amortecimento supercrítico;

$$\frac{\gamma}{2} > \omega_0$$

Amortecimento crítico;

$$\frac{\gamma}{2} = \omega_0$$

Amortecimento subcrítico;

$$\frac{\gamma}{2} < \omega_0$$

Amortecimento supercrítico, nesse caso: $\Delta > 0$. Então a equação auxiliar tem duas raízes reais e distintas:

$$mr^2 + cr + k = 0 \quad (52)$$

$$r^2 + \frac{c}{m}r + \frac{k}{m} = 0 \quad (53)$$

chamando $\frac{c}{m} = \gamma$ e $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$

$$\Gamma = \begin{cases} \Gamma_1 = \frac{\gamma}{2} - \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2} \\ \Gamma_2 = -\frac{\gamma}{2} + \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2} \end{cases}$$

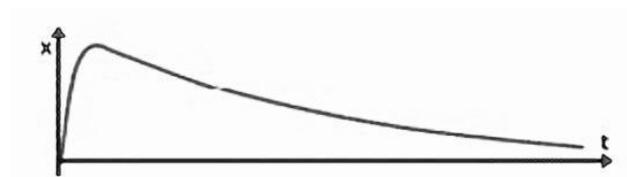
Lembrando que para $\Delta > 0$. A solução é dada por:

$$x(t) = C_1 e^{\Gamma_1 t} + C_2 e^{\Gamma_2 t} \quad (54)$$

As constantes c_1 e c_2 são dadas pelas condições iniciais de $x(0)$ e $\dot{x}(0)$.

O gráfico do amortecimento supercrítico tem essa cara:

Figura 12 - Amortecimento supercrítico



Fonte: autoria própria

Uma soma de exponenciais decrescentes

Amortecimento crítico, nesse caso: $\Delta = 0$. Então a equação auxiliar tem duas raízes reais e iguais:

$$r^2 + \frac{c}{m}r + \frac{k}{m} = 0 \quad (55)$$

$$r = r_1 = r_2 = -\frac{C}{2m} = -\frac{\gamma}{2} \quad (56)$$

A solução é dada por:

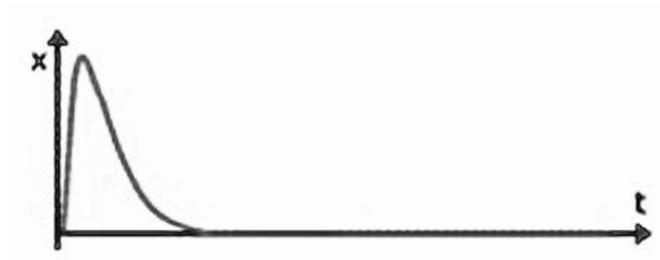
$$x(t) = C_1 e^{rt} + C_2 t e^{rt} \quad (57)$$

Ou, se preferir colocar em evidência:

$$x(t) = (C_1 + C_2 t) e^{rt} \quad (58)$$

As constantes c_1 e c_2 são dadas pelas condições iniciais de $x(0)$ e $\dot{x}(0)$. O gráfico do amortecimento crítico assemelha-se ao do amortecimento supercrítico (lembra que $r < 0$):

Figura 13 - Amortecimento crítico



Fonte: autoria própria

Nesse caso decai mais rapidamente nesse caso do que no caso supercrítico, mesmo o amortecimento sendo menor.

Amortecimento subcrítico, nesse caso: $\Delta < 0$. Então a equação auxiliar tem duas raízes imaginárias:

$$r^2 + \frac{c}{m}r + \frac{k}{m} = 0 \quad (59)$$

chamando $\frac{c}{m} = \gamma$ e $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$

$$r^2 + \gamma r + \omega_0^2 = 0 \quad (60)$$

$$r = -\frac{\gamma}{2} \pm i\omega = \begin{cases} \Gamma_1 = -\frac{C}{2m} + \frac{i}{2m} \sqrt{4\omega_0^2 m^2 - C^2} = -\frac{\gamma}{2} - i \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}} \\ \Gamma_2 = -\frac{C}{2m} - \frac{i}{2m} \sqrt{4\omega_0^2 m^2 - C^2} = -\frac{\gamma}{2} + i \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}} \end{cases}$$

Lembrando que $\Delta < 0$. E a solução é dada por:

$$x(t) = A e^{-\frac{\gamma t}{2}} \cos(\omega t + \emptyset) \quad (61)$$

As constantes A e \emptyset são dadas pelas condições iniciais de $x(0)$ e $\dot{x}(0)$.

Abaixo encontra-se um exemplo do gráfico do amortecimento subcrítico:

Figura 14 - Amortecimento subcrítico



Fonte: autoria própria

Nesse caso, o movimento é oscilatório, mas as amplitudes vão sendo cada vez menores, até parar. Vale ressaltar que o amortecimento que faz com o tenda a origem mais rapidamente é o crítico. No fundo, estamos fazendo o mesmo que fizemos com MHS, só que considerando o atrito.

Dizemos que a força de atrito é sempre da forma:

$$F_{\text{at}} = -c\dot{x} \quad (62)$$

Depois é só substituir na Segunda Lei de Newton:

$$F_R = ma \quad (63)$$

Mas se for o caso de ser a Segunda Lei de Newton de rotação:

$$\tau_R = I\alpha \quad (64)$$

O torque de atrito é dado por:

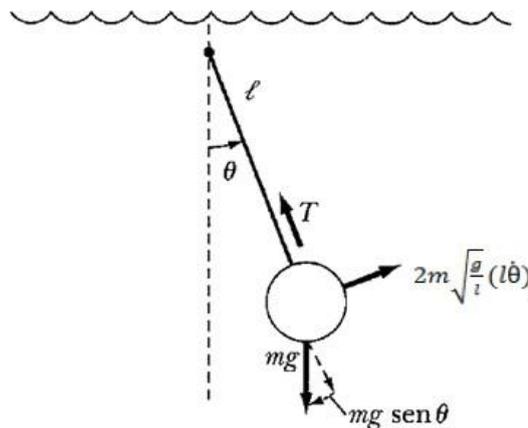
$$\tau_{at} = -C\dot{\theta} \quad (65)$$

Seria o equivalente da rotação: o torque de atrito é proporcional à velocidade angular. Será sempre assim a menos que o problema forneça outra expressão.

5 PÊNULO CRITICAMENTE AMORTECIDO

Um exemplo fundamental que impulsionou a pesquisa, foi o problema 3.3 do livro "Dinâmica Clássica de Partículas e Sistemas"[11]. O enunciado desse problema apresenta a seguinte situação: consideramos um pêndulo de comprimento l e um prumo de massa m em sua extremidade movendo-se em óleo movendo em óleo com θ decrescente. O prumo pesado efetua pequenas oscilações, porém o óleo retarda o movimento do prumo com força resistiva proporcional à velocidade com $F_{res} = 2m \sqrt{\frac{g}{l}} (l\dot{\theta})$ O prumo é inicialmente puxado para trás em $t = 0$ com $\theta(0) = \alpha$ e $\dot{\theta}(0) = 0$. Logo, o enunciado pedia para que determinasse o deslocamento angular $\theta(t)$ e a velocidade $\dot{\theta}(t)$ como função do tempo.

Figura 15- Pêndulo do Exemplo 3.3



Fonte: [11]

Solução: A gravidade possui uma força de restauração e a componente que puxa o prumo de volta ao equilíbrio é $mg \sin \theta$. Aplicando a segunda lei de Newton temos:

$$\text{Força} = m(l\ddot{\theta}) = \text{Força de restauração} + \text{Força resistiva}$$

É fundamental destacar que a força de restauração é um conceito central em funções oscilatórias. Essa força, muitas vezes representada como F_{res} é uma força direcionada para o ponto de equilíbrio ou posição de segurança de um sistema após ser deslocado de sua posição inicial. Em um movimento oscilatório, a força de restauração surge como resultado de deformações, deslocamentos ou perturbações no sistema, e sua magnitude é proporcional à magnitude do deslocamento em relação à posição de equilíbrio.

Esta força é de natureza restaurada, pois é de maneira oposta à posição da posição de equilíbrio. Em um pêndulo simples, por exemplo, a força de restauração é diretamente proporcional ao ângulo de deslocamento do pêndulo da vertical. Para muitos sistemas, a lei de Hooke é comumente utilizada para modelar essa relação, onde a força de restauração, é proporcional ao deslocamento (x), expressa:

$$F_{res} = -k \cdot x \quad (66)$$

Até o momento, vimos somente sistemas em MHS, onde não há a presença de nenhuma força dissipativa de energia (Força resistiva) O que ocorrerá quando há uma segunda força atuando no sistema, como um atrito. Na natureza, o que sempre observamos é que as oscilações não duram para sempre, ou seja, perderão energia ao longo do tempo. Para entender os efeitos de uma força dissipativa em um sistema oscilante, precisamos, inicialmente, expressar matematicamente essa força. A forma mais simples de modelar uma força de atrito é pensar que essa força é uma força viscosa. Nesse caso, podemos modelar a força seguindo a Lei de Stokes [3], dada por:

$$F_a = -b \cdot v \quad (67)$$

Onde $b = 2m\sqrt{\frac{g}{l}}$ é uma constante que depende do meio (relacionado a sua viscosidade) e v é a velocidade. Teremos:

$$ml\ddot{\theta} = -mg\text{sen}\theta - bl\dot{\theta} \quad (68)$$

Dividindo tudo por l e isolando $\ddot{\theta}$:

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\text{sen}\theta - \frac{b}{m}\dot{\theta} \quad (69)$$

$$\ddot{\theta} + \frac{b}{m}\dot{\theta} + \frac{g}{l}\text{sen}\theta = 0 \quad (70)$$

$$\ddot{\theta} + \gamma\dot{\theta} + \omega_0^2 \cdot \text{sen}\theta = 0 \quad (71)$$

A equação (71) é a equação diferencial que irá descrever um sistema com atrito. A constante $\gamma = \frac{b}{m}$ foi inserida somente para simplificar a equação e ω_0 é a frequência angular natural do sistema.

$$\omega_0^2 = \frac{g}{l} \quad \rightarrow \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$\gamma = \frac{b}{m}$$

temos:

b: Representa coeficiente de arrasto.

m: Representa a massa.

g: É a aceleração devido à gravidade

l: É o comprimento do pêndulo.

Ao abordar o problema 3.3 apresentado por Marion, deparamo-nos com uma equação diferencial que descreve o sistema em estudo. Optamos por analisar cada condição de amortecimento, compreendendo que, devido à complexidade da EDO associada a (Equação 71), a obtenção de soluções analíticas não é viável.

Diante dessa limitação analítica, recorreremos ao Método de Runge-Kutta para sintetizar os comportamentos dinâmicos dos três casos distintos de amortecimento. Este método numérico revela-se fundamental para explorar e representar as soluções ao longo do tempo, oferecendo uma abordagem eficaz na ausência de soluções analíticas diretas.

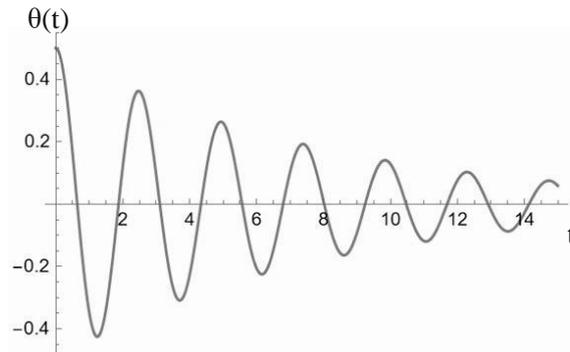
5.1 Amortecimento subcrítico

O amortecimento subcrítico apresenta desafios únicos, exigindo uma abordagem robusta e precisa. O Método de Runge-Kutta, escolhido estrategicamente, permitiu-nos alcançar resultados que atendem não apenas às expectativas, mas também superam as complexidades inerentes ao problema proposto.

Os benefícios deste método incluem não apenas a obtenção de resultados precisos, mas também a flexibilidade e adaptabilidade para lidar com variações nos parâmetros e condições iniciais. Isso confirma a escolha acertada do Método de Runge-Kutta para a resolução numérica deste desafio específico.

Caracterizado por: $\omega_0^2 > \gamma$

Figura 16 - Solução numérica amortecimento subcrítico



Fonte: autoria própria

No contexto do amortecimento subcrítico, destacamos três aspectos fundamentais:

Atenuação Gradual das Oscilações: O gráfico evidencia a presença de oscilações amortecidas, caracterizadas por uma atenuação gradual ao longo do tempo. Essa característica é indicativa do efeito do amortecimento subcrítico, que reduz progressivamente a amplitude das oscilações, mas não as elimina completamente.

Tempo de Estabilização: Uma análise temporal revela o período necessário para que o sistema atinja a estabilidade. Notamos que, embora as oscilações diminuam, o sistema requer um tempo finito para alcançar uma condição de equilíbrio. Essa observação é crucial para compreender o comportamento dinâmico do sistema ao longo do tempo.

Resposta do Sistema a Condições Iniciais: O gráfico destaca a influência das condições iniciais no comportamento do sistema. Pequenas variações nas condições iniciais podem resultar em trajetórias distintas, ressaltando a sensibilidade do sistema às condições iniciais em um contexto de amortecimento subcrítico.

5.2 Amortecimento crítico

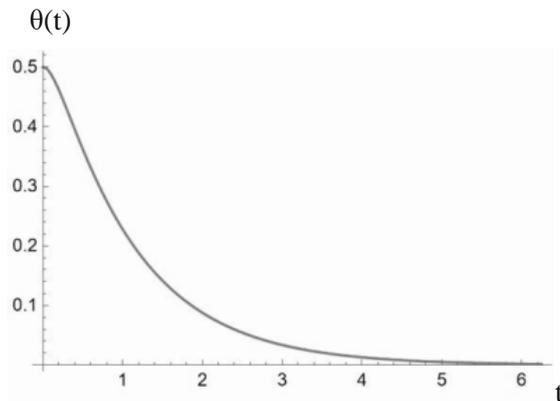
Visando compreender como sistemas submetidos a essa condição específica evoluem ao longo do tempo, e os resultados obtidos são dignos de destaque. Uma observação primordial é a rapidez com que a solução com amortecimento crítico decai em direção ao repouso. O gráfico gerado pelo Método de Runge-Kutta exibe um notável declínio nas oscilações, indicando uma convergência eficaz para a estabilidade. Esse fenômeno revela a capacidade singular do amortecimento crítico em dissipar a energia do sistema de forma acelerada, proporcionando uma resposta mais veloz em direção ao estado de repouso.

O Método de Runge-Kutta, escolhido estrategicamente para lidar com esta EDO complexa, permitiu uma análise detalhada das nuances do comportamento do sistema. A

solução obtida não apenas confirma a eficácia do método numérico, mas também destaca a importância prática desses resultados.

Caracterizado por: $\omega_0^2 = \gamma$

Figura 17 - Solução numérica amortecimento crítico



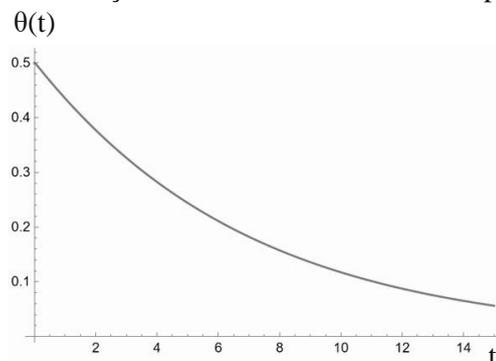
Fonte: autoria própria

5.3 Amortecimento supercrítico

O destaque principal reside na observação de que, nos casos de amortecimento crítico e supercrítico, a solução exibe um decaimento monótono em direção ao repouso, sem oscilações. O gráfico gerado pelo Método de Runge-Kutta revela claramente uma trajetória descendente consistente, indicando uma estabilidade robusta e um rápido retorno ao estado de equilíbrio.

Caracterizado por: $\omega_0^2 < \gamma$

Figura 18 - Solução numérica amortecimento supercrítico

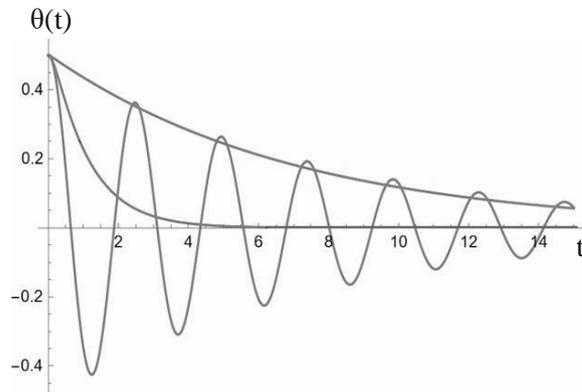


Fonte: autoria própria

Os resultados numéricos obtidos através do Wolfram Mathematica® ilustram os três

diferentes casos de amortecimento no pêndulo simples. A representação gráfica desempenhou um papel crucial em nossa pesquisa, fornecendo insights visuais valiosos sobre o comportamento dinâmico do sistema.

Figura 19 - Os três casos de amortecimento



Fonte: autoria própria

O gráfico explica a razão dos nomes dados aos três casos:

- O único dos três casos que é oscilatório é o do amortecimento subcrítico;
- Os casos de amortecimento crítico e supercrítico levam a um decaimento monótono (sem oscilações) em direção ao repouso;
- A solução com amortecimento crítico é a que decai mais rapidamente em direção ao repouso;
- O nome “crítico” vem do fato de que é para o valor do parâmetro γ deste caso ($\gamma = \omega_0^2$) que o comportamento de decaimento do corpo em direção ao repouso deixa de ser oscilatório e passa a ser monótono (exponencial).

Cada gráfico, gerado com o auxílio do Método de Runge-Kutta no Wolfram Mathematica®, reflete detalhes específicos da resposta do pêndulo diante das variações de amortecimento. A precisão visual desses resultados destaca a eficácia tanto do método numérico quanto do software utilizado. Nosso objetivo também é mostrar o código-fonte que está descrito nos apêndices C, D e E. Este código oferece uma base sólida para compreender e replicar as simulações realizadas, promovendo a transparência e a reprodutibilidade dos resultados apresentados.

6 CONCLUSÃO

Ao empregar o software Wolfram Mathematica®, conduzimos uma pesquisa voltada para a obtenção e análise de gráficos representativos do comportamento do pêndulo simples, especialmente quando submetido a grandes oscilações e variação no amortecimento. No âmbito dessa investigação, o Método de Runge-Kutta desempenhou um papel central e instrumental na obtenção de resultados precisos e na validação da eficiência do software.

Os gráficos gerados pelo Mathematica®, utilizando o Método de Runge-Kutta, ofereceram uma representação visual clara e detalhada das oscilações do pêndulo simples em diferentes cenários de amortecimento. Notavelmente, a flexibilidade e potência do Mathematica possibilitaram a implementação eficaz do Método de Runge-Kutta de quarta ordem (RK-4), destacando-se em relação a métodos de ordem inferior, como RK-1 e RK-2.

Nos três casos de amortecimento - subcrítico, crítico e supercrítico - o Mathematica®, aliado ao RK-4, demonstrou uma capacidade excepcional de lidar com as complexidades das equações diferenciais não lineares do pêndulo simples. A precisão dos resultados alcançados, especialmente quando comparados com as soluções analíticas conhecidas, ressalta a eficácia do método na modelagem de sistemas dinâmicos complexos.

Além disso, a facilidade proporcionada pelo Mathematica® na representação gráfica, expressões algébricas e resolução numérica foi crucial para a interpretação dos resultados e para o êxito da pesquisa. A capacidade de visualizar e analisar diretamente os gráficos gerados no Mathematica fortaleceu a confiabilidade e a compreensão dos resultados obtidos.

Portanto, concluímos que a aplicação do Método de Runge-Kutta no Wolfram Mathematica® não apenas atendeu, mas excedeu as expectativas na análise do pêndulo simples com grandes oscilações e variação do amortecimento. A combinação dessas ferramentas computacionais demonstrou ser uma abordagem eficiente e confiável para lidar com problemas físicos complexos, fornecendo insights valiosos e abrindo caminho para futuras investigações em sistemas dinâmicos similares.

REFERÊNCIAS

- ARAÚJO, Eduardo. **MÉTODOS NUMÉRICOS PARA SIMULAÇÃO NA ENGENHARIA**. Blog ESS, 30 de novembro de 2017. Disponível em <<https://www.esss.co/blog/simulacao-numerica-metodo-analitico-experimental-concorrentes-ou-complementares-na-engenharia/>> Acesso em: 20 de novembro de 2023.
- COELHO, Pedro. **Métodos de Euler e Runge Kutta: Exemplo de Aplicação**, Blog de engenharia química. Disponível em: <https://www.engquimicasantosp.com.br/2016/03/metodos-de-euler-e-runge-kutta.html>. Acesso em: 21 de ago. 2023.
- COTTA, Alexandre. **Oscilador amortecido**. Disponível em: https://dfi.ufla.br/alexandrecotta/wp-content/uploads/NotaAula_05OsciladorAmortecido.pdf. Acesso em: 25 de set. 2023.
- EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. Campinas: Unicamp, 2004.
- GILAT, A.; SUBRAMANIAM, V. **Métodos numéricos para engenheiros e cientistas: uma introdução com aplicações usando o MATLAB**. Porto Alegre: Bookman, 2008.
- HALLIDAY, David; RESNICK, Robert; WALKER, Jearl. **Fundamentos de Física 2. Mecânica**. 4. Ed. Rio de Janeiro: LTC, 1996.
- LYRA, Felipe. **A Importância dos Métodos Numéricos para a Astrofísica**. Universidade Federal do Fluminense. Rio de Janeiro, 2018.
- OLIVEIRA, P. M. C. de. **COMPORTAMENTO CRÍTICO NO PÊNDULO SIMPLES**. Revista Brasileira de Ensino de Física. São Paulo, v. 17, p. 21, 1995.
- ROCHA, Daniela; LUSTOSA, Lisete . **RESGATANDO MÉTODOS PARA O CÁLCULO DE RAÍZES QUADRADAS E RAÍZES CÚBICAS**. Universidade Federal do Fluminense. Rio de Janeiro, 1997.
- STEVEN, Chapra.; Raymond, Canale. **Métodos Numéricos para Engenharia**. McGraw Hill Brasil, 2016.
- THORNTON, Stephen; MARION, Jerry. **Dinâmica clássica de partículas e sistemas**. 1. ed. [S. l.]: Cengage Learning, 2011. 608 p. ISBN 8522109060
- TORRES, Maria teresa. **MÉTODOS NUMÉRICOS: EXERCÍCIOS RESOLVIDOS APLICADOS À ENGENHARIA E OUTRAS CIÊNCIAS**. Universidade de Minho, 2012. Disponível em: https://repositorium.sdum.uminho.pt/bitstream/1822/14965/6/livro_mn.pdf.
- VALLE, Karine. **Métodos Numéricos de Euler e Runge-Kutta**. Belo Horizonte, 2012.
- WILLERS, Scheila.; KREMER, Darciane. **MODELAGEM MATEMÁTICA DO PÊNDULO SIMPLES AMORTECIDO**. Experiências e reflexões educativas na Rede Sinodal de Educação, 2017.
- YOUNG, H.D.; FREEDMAN, R. A. **Física: Mecânica vol. 1**, 10ª ed. São Paulo: Addison Wesley, 2003.

APÊNDICE A- PROCESSO DE CONSTRUÇÃO DO TERCEIRO TERMO DA EQUAÇÃO 68

$$F_a = -b \cdot \dot{x}$$

$$\dot{x} = v = l \cdot \dot{\theta}$$

$$F_a = -b(l \cdot \dot{\theta})$$

$$\vec{v} = \vec{r} \cdot \vec{\omega}$$

$$v = l \cdot \frac{d\theta}{dt}$$

APÊNDICE B- APLICAÇÃO DO RK-4 PARA A EQUAÇÃO 41

```

In[1]:= (* Rotina do Método de Runge-Kutta *)
In[2]:= (* Gravidade *)
In[3]:= g=9.81;
In[4]:= (* Comprimento do fio *)
In[5]:= l=1.2;
In[6]:= (* Frequência natural *)
In[7]:=  $\omega_0=\sqrt{g/l}$ ;
In[8]:= (* Ângulo inicial *)
In[9]:=  $\alpha=0.5$ ;
In[10]:= (* Massa *)
In[11]:= m=1.5;
In[14]:= (* Intervalo de varredura *)
In[15]:= a=0;
In[16]:= b=15;
In[17]:= (* Tamanho do passo *)
In[18]:= h=0.01;
In[19]:= (* "Fatiamento" do intervalo *)
In[20]:= L=(b-a)/h;
In[21]:= (* Rotina do Método de Runge-Kutta de 4a ordem para as duas funções *)
In[22]:= Do[x[n]=n*h,{n,0,L}]
      y[0]= $\alpha$ ;
      z[0]=0;
      F[x_,y_,z_]=z;
      G[x_,y_,z_]=  $-\omega_0^2\text{Sin}[y]$ ;
Do[{
  k1=h*F[x[n],y[n],z[n]],
  t1=h*G[x[n],y[n],z[n]],
  k2=h*F[x[n]+h/2,y[n]+k1/2,z[n]+k1/2],
  t2=h*G[x[n]+h/2,y[n]+t1/2,z[n]+t1/2],
  k3=h*F[x[n]+h/2,y[n]+k2/2,z[n]+k2/2],
  t3=h*G[x[n]+h/2,y[n]+t2/2,z[n]+t2/2],
  k4=h*F[x[n]+h,y[n]+k3,z[n]+k3],
  t4=h*G[x[n]+h,y[n]+t3,z[n]+t3],
  y[n+1]=y[n]+(k1/6+k2/3+k3/3+k4/6),
  z[n+1]=z[n]+(t1/6+t2/3+t3/3+t4/6)},
{n,0,L}]
In[23]:= Grafico=ListLinePlot[{Table[{y[n],z[n]},{n,0,240}]}]

```

APÊNDICE C - CÓDIGO DO PÊNULO COM AMORTECIMENTO SUBCRÍTICO

```

In[1]:=Resolução da EDO, Eq. 3.46 - Caso  $\omega_0^2 > \gamma$  --> Subcrítico
In[2]:= (* solan=DSolve[{  $\theta''[t]==-(g/l) \text{Sin}[\theta[t]]-ba/(m l^2) \theta'[t]$ }, $\theta[t],t$ ] *)
In[3]:= (* Rotina do Método de Runge-Kutta *)
In[4]:= (* Constantes: gravidade, comprimento do fio *)
In[5]:= (* Gravidade *)
In[6]:= g=9.81;
In[7]:= (* Comprimento do fio *)
In[8]:= l=1.2;
In[9]:= (* Frequência natural *)
In[10]:=  $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ ;
In[11]:= (* Constante de amortecimento *)
In[12]:= ba=0.5;
In[13]:= (* Massa *)
In[14]:= m=1.5;
In[15]:= (* Parâmetro de amortecimento *)
In[16]:=  $\gamma=ba/m$ 
0.333333
In[17]:=  $\omega_0^2$ 
6.8125
In[18]:= (* Ângulo inicial *)
In[19]:=  $\alpha=0.5$ ;
In[20]:= (* Intervalo de varredura *)
In[21]:= a=0;
In[17]:= b=15;
In[18]:= (* Tamanho do passo *)
In[19]:= h=0.01;
In[20]:= (* "Fatiamento" do intervalo *)
In[21]:= L=(b-a)/h;
In[22]:= (* Rotina do Método de Runge-Kutta de 4a ordem para as duas funções *)
Do[x[n]=n*h,{n,0,L}]
y[0]= $\alpha$ ;
z[0]=0;
F[x_,y_,z_]=z;
G[x_,y_,z_]= -  $\omega_0^2 \text{Sin}[y]- \gamma z$ ;
Do[{
  k1=h*F[x[n],y[n],z[n]],
  t1=h*G[x[n],y[n],z[n]],
  k2=h*F[x[n]+h/2,y[n]+k1/2,z[n]+k1/2],
  t2=h*G[x[n]+h/2,y[n]+t1/2,z[n]+t1/2],
  k3=h*F[x[n]+h/2,y[n]+k2/2,z[n]+k2/2],
  t3=h*G[x[n]+h/2,y[n]+t2/2,z[n]+t2/2],
  k4=h*F[x[n]+h,y[n]+k3,z[n]+k3],
  t4=h*G[x[n]+h,y[n]+t3,z[n]+t3],
  y[n+1]=y[n]+(k1/6+k2/3+k3/3+k4/6),
  z[n+1]=z[n]+(t1/6+t2/3+t3/3+t4/6)},{n,0,L}

```

APÊNDICE D - CÓDIGO DO PÊNULO COM AMORTECIMENTO CRÍTICO

```

In[1]:=Resolução da EDO, Eq. 3.46 - Caso  $\omega_0^2 = \gamma$  --> crítico
In[2]:= (* solan=DSolve[{  $\theta''[t]==-(g/l) \text{Sin}[\theta[t]]-ba/(m l^2) \theta'[t]$ }, $\theta[t],t$  *)
In[3]:= (* Rotina do Método de Runge-Kutta *)
In[4]:= (* Constantes: gravidade, comprimento do fio *)
In[5]:= (* Gravidade *)
In[6]:= g=9.81;
In[7]:= (* Comprimento do fio *)
In[8]:= l=1.2;
In[9]:= (* Frequência natural *)
In[10]:=  $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ ;
In[11]:= (* Constante de amortecimento *)
In[12]:= ba=12.2625;
In[13]:= (* Massa *)
In[14]:= m=1.5;
In[15]:= (* Parâmetro de amortecimento *)
In[16]:=  $\gamma=ba/m$ 
8.175
In[17]:=  $\omega_0^2$ 
6.8125
In[18]:= (* Ângulo inicial *)
In[19]:=  $\alpha=0.5$ ;
In[20]:= (* Intervalo de varredura *)
In[21]:= a=0;
In[17]:= b=50;
In[18]:= (* Tamanho do passo *)
In[19]:= h=0.01;
In[20]:= (* "Fatiamento" do intervalo *)
In[21]:= L=(b-a)/h;
In[22]:= (* Rotina do Método de Runge-Kutta de 4a ordem para as duas funções *)
Do[x[n]=n*h,{n,0,L}]
y[0]= $\alpha$ ;
z[0]=0;
F[x_,y_,z_]=z;
G[x_,y_,z_]= -  $\omega_0^2 \text{Sin}[y]-\gamma z$ ;
Do[{
  k1=h*F[x[n],y[n],z[n]],
  t1=h*G[x[n],y[n],z[n]],
  k2=h*F[x[n]+h/2,y[n]+k1/2,z[n]+k1/2],
  t2=h*G[x[n]+h/2,y[n]+t1/2,z[n]+t1/2],
  k3=h*F[x[n]+h/2,y[n]+k2/2,z[n]+k2/2],
  t3=h*G[x[n]+h/2,y[n]+t2/2,z[n]+t2/2],
  k4=h*F[x[n]+h,y[n]+k3,z[n]+k3],
  t4=h*G[x[n]+h,y[n]+t3,z[n]+t3],
  y[n+1]=y[n]+(k1/6+k2/3+k3/3+k4/6),
  z[n+1]=z[n]+(t1/6+t2/3+t3/3+t4/6)},{n,0,L}]

```

APÊNDICE E - CÓDIGO DO PÊNULO COM AMORTECIMENTO SUPERCRÍTICO

```

In[1]:=Resolução da EDO, Eq. 3.46 - Caso  $\omega_0^2 < \gamma$  --> supercrítico
In[2]:= (* solan=DSolve[{  $\theta''[t]==-(g/l) \text{Sin}[\theta[t]]-ba/(m l^2) \theta'[t]$ }, $\theta[t],t$ ] *)
In[3]:= (* Rotina do Método de Runge-Kutta *)
In[4]:= (* Constantes: gravidade, comprimento do fio *)
In[5]:= (* Gravidade *)
In[6]:= g=9.81;
In[7]:= (* Comprimento do fio *)
In[8]:= l=1.2;
In[9]:= (* Frequência natural *)
In[10]:=  $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ ;
In[11]:= (* Constante de amortecimento *)
In[12]:= ba=70;
In[13]:= (* Massa *)
In[14]:= m=1.5;
In[15]:= (* Parâmetro de amortecimento *)
In[16]:=  $\gamma=ba/m$ 
46.6667
In[17]:=  $\omega_0^2$ 
6.8125
In[18]:= (* Ângulo inicial *)
In[19]:=  $\alpha=0.5$ ;
In[20]:= (* Intervalo de varredura *)
In[21]:= a=0;
In[17]:= b=15;
In[18]:= (* Tamanho do passo *)
In[19]:= h=0.01;
In[20]:= (* "Fatiamento" do intervalo *)
In[21]:= L=(b-a)/h;
In[22]:= (* Rotina do Método de Runge-Kutta de 4a ordem para as duas funções *)
Do[x[n]=n*h,{n,0,L}]
y[0]= $\alpha$ ;
z[0]=0;
F[x_,y_,z_]=z;
G[x_,y_,z_]= -  $\omega_0^2 \text{Sin}[y]-\gamma z$ ;
Do[{
  k1=h*F[x[n],y[n],z[n]],
  t1=h*G[x[n],y[n],z[n]],
  k2=h*F[x[n]+h/2,y[n]+k1/2,z[n]+k1/2],
  t2=h*G[x[n]+h/2,y[n]+t1/2,z[n]+t1/2],
  k3=h*F[x[n]+h/2,y[n]+k2/2,z[n]+k2/2],
  t3=h*G[x[n]+h/2,y[n]+t2/2,z[n]+t2/2],
  k4=h*F[x[n]+h,y[n]+k3,z[n]+k3],
  t4=h*G[x[n]+h,y[n]+t3,z[n]+t3],
  y[n+1]=y[n]+(k1/6+k2/3+k3/3+k4/6),
  z[n+1]=z[n]+(t1/6+t2/3+t3/3+t4/6)},{n,0,L}

```