



**INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO CIÊNCIA E TECNOLOGIA  
CAMPUS PETROLINA**

**PÊNULOS SIMPLES E DUPLO: ANALISANDO A  
EQUIVALÊNCIA ENTRE OS FORMALISMOS  
NEWTONIANO E LAGRANGEANO**

**NICOLAS FERREIRA DE SOUZA**

**PETROLINA- 2024**

NICOLAS FERREIRA DE SOUZA

**PÊNULOS SIMPLES E DUPLO: ANALISANDO A EQUIVALÊNCIA  
ENTRE OS FORMALISMOS NEWTONIANO E LAGRANGEANO**

Monografia apresentada ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia, campus Petrolina, como requisito parcial à obtenção do título de Licenciatura em Física.

**Orientador:** Prof. Me. Dionisio Felipe dos Santos Junior.

PETROLINA-2024

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

---

d0 de souza, Nicolas Ferreira.

Pêndulos Simples e Duplo: Analisando a Equivalência Entre os Formalismos Newtoniano e Lagrangeano / Nicolas Ferreira de souza. - Petrolina, 2024.  
1 f.

Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Física) -Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Sertão Pernambucano, Campus Petrolina, 2024.  
Orientação: Prof. Dionísio Felipe dos Santos Júnior.

1. Ensino de Física. 2. Mecânica Newtoniana. 3. Formalismo de Lagrange. I. Título.

CDD 530.07

---



## **ATA DE DEFESA DE TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO (TCC)**

Ata nº 02/2024 da sessão de defesa de Trabalho de Conclusão de Curso do(a) aluno(a) **NÍCOLAS FERREIRA DE SOUZA**, do Curso Superior de Licenciatura em Física do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Sertão Pernambucano - IFSertão-PE, Campus Petrolina, realizada no dia **26 de SETEMBRO** de 2024.

Aos **vinte e seis dias do mês de setembro de dois mil de vinte e dois (26/09/2024)**, na sala **D06** do Campus Petrolina do IFSertãoPE, sob a presidência do(a) professor(a) **DIONÍSIO FELIPE DOS SANTOS JÚNIOR** (IFSertãoPE), reuniu-se a Banca Examinadora composta pelo presidente e pelos membros, os professores **PEDRO DE SIQUEIRA CAMPOS FILHO** (IFSertãoPE) e **NEWTON PIONÓRIO NOGUEIRA** (IFSertãoPE). Às **dezenove horas e trinta minutos (19h30)**, o presidente abriu a sessão de defesa de Trabalho de Conclusão de Curso do(a) aluno(a) **NÍCOLAS FERREIRA DE SOUZA**, intitulado **“PÊNDULOS SIMPLES E DUPLO: ANALISANDO A EQUIVALÊNCIA ENTRE OS FORMALISMOS NEWTONIANO E LAGRANGEANO”**, orientado(a) pelo(a) professor(a) **DIONÍSIO FELIPE DOS SANTOS JÚNIOR**. Após a exposição do(a) aluno(a) e arguição da Banca, esta se reuniu reservadamente e decidiu pela **APROVAÇÃO, com ressalva de correção obrigatória** para o aluno, com nota **7,0 (SETE)**. Nada mais havendo a tratar, foi encerrada a sessão, da qual eu, **DIONÍSIO FELIPE DOS SANTOS JÚNIOR**, professor(a), lavrei a presente ata que vai assinada por mim, pelos demais membros da Banca.

Petrolina-PE, 26 de setembro de 2024.



Prof. Me. DIONÍSIO FELIPE DOS SANTOS JUNIOR



Prof. Dr. PEDRO DE SIQUEIRA CAMPOS FILHO



Prof. Me. NEWTON PIONÓRIO NOGUEIRA

**NICOLAS FERREIRA DE SOUZA**

**PÊNDULOS SIMPLES E DUPLO: ANALISANDO A EQUIVALÊNCIA  
ENTRE OS FORMALISMOS NEWTONIANO E LAGRANGEANO**

Monografia de Conclusão de Curso do Instituto Federal De Educação Ciência e Tecnologia campus petrolina, como requisito à obtenção do título parcial de licenciado em Física.

**Data de aprovação:**

**Banca Examinadora:**

---

**Prof. Me. Dionisio Felipe dos Santos Júnior**  
If sertão-pe

---

**Prof. Dr. Pedro de Siqueira Campos Filho**  
If sertão-pe

---

**Prof. Me. Newton Pionório Nogueira**  
If sertão-pe

*Aos Nossos Filhos, Pedro, Maria e João*

## AGRADECIMENTOS

À minha esposa Cleonice Soares pelo seu apoio;

Ao Prof. Me. Dionísio pela orientação e paciência, sempre receber minhas dúvidas a respeito deste trabalho;

Aos professores que compõem a banca, o conhecimento particular de cada um é muito importante.

*“Apreciação do universo torna lógico que haja um criador.”*

Sheldon Cooper, (The Big Bang Theory)



## RESUMO

Este trabalho tem como objetivo estudar e comparar a dinâmica dos sistemas de pêndulos simples e duplos através dos formalismos newtoniano e lagrangiano. Ambas as abordagens oferecem perspectivas distintas sobre a mecânica clássica: o formalismo newtoniano, baseado na mecânica vetorial e nas forças, contrasta com o formalismo lagrangiano, que se baseia em coordenadas generalizadas e princípios de energia. Ao derivar as equações de movimento para os pêndulos simples e duplos usando esses métodos, analisamos a estrutura matemática e os insights físicos que cada abordagem fornece. Adicionalmente, foi implementado um experimento simples para ilustrar o comportamento dos sistemas, enfatizando diferenças de complexidade e eficiência entre os dois formalismos quando aplicados a sistemas não lineares como o pêndulo duplo. Este estudo visa destacar a equivalência teórica e prática dos dois métodos.

**Palavras-chave:** Formalismo de Lagrange, Formalismo newtoniano, Mecânica clássica;

## ABSTRACT

This work aims to study and compare the dynamics of single and double pendulum systems through the Newtonian and Lagrangian formalisms. Both approaches offer distinct perspectives on classical mechanics: Newtonian formalism, based on vector mechanics and forces, contrasts with Lagrangian formalism, which is based on generalized coordinates and energy principles. By deriving the equations of motion for single and double pendulums using these methods, we analyze the mathematical structure and physical insights that each approach provides. Additionally, a simple experiment was implemented to illustrate the behavior of the systems, emphasizing differences in complexity and efficiency between the two formalisms when applied to nonlinear systems such as the double pendulum. This study aims to highlight the theoretical and practical equivalence of the two methods.

**Keywords:** Lagrange formalism, Newtonian formalism, Classical mechanics;

## SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO . . . . .	16
2	AS LIMITAÇÕES DA MECÂNICA NEWTONIANA E O SURGIMENTO DO FORMALISMO DE LAGRANGE . . . . .	17
3	CÁLCULO DAS VARIAÇÕES . . . . .	19
3.1	O problema da Braquistócrona . . . . .	19
4	FORMALISMO DE LAGRANGE . . . . .	21
5	EQUAÇÃO DE EULER-LAGRANGE . . . . .	22
5.1	Equivalência entre as equações de Newton e Lagrange . . . . .	23
5.2	O Pêndulo Simples Pelo Formalismo Newtoniano e Lagrangeano . . . . .	25
5.2.1	Descrição Newtoniana . . . . .	26
5.2.2	Descrição Lagrangiana . . . . .	28
6	O PÊNDULO DUPLO . . . . .	31
6.1	O pêndulo duplo pelo método newtoniano . . . . .	31
6.1.1	Aplicação do formalismo lagrangiano . . . . .	37
7	MÉTODO DE RUNGE-KUTTA DE QUARTA ORDEM . . . . .	40
7.1	Aplicação do Método de Runge-Kutta . . . . .	41
8	METODOLOGIA . . . . .	43
9	CONCLUSÃO . . . . .	44
	REFERÊNCIAS . . . . .	45

# 1 INTRODUÇÃO

O estudo do movimento de sistemas mecânicos é um tema crucial na física clássica, com uma vasta exploração em conhecimento e pesquisa tanto em contextos práticos quanto educacionais. Entre os diversos temas estudados estão os pêndulos, que oferecem formas relativamente simples de compreensão, entendimento e abordam em alguns casos comportamento dinâmico e caótico, além de serem úteis na introdução de conceitos de física básica. Para a descrição da dinâmica desses sistemas, existem diferentes formas de abordagens matemáticas. A mecânica newtoniana é caracterizada pela formulação em termos de força e aceleração. Já a mecânica lagrangeana é por meio do princípio variacional, que aborda uma alternativa baseada em energia.

Lagrange reuniu todos os desenvolvimentos na mecânica newtoniana no século após a morte de Newton e os reformulou na mecânica lagrangiana. Foi apresentado uma síntese de tudo o que se passou nesse período com base em seu próprio sistema matemático, que descrevia os limites de um sistema mecânico em termos de todas as variações que podiam acontecer, suas equações relacionam a energia cinética de um sistema às suas coordenadas generalizadas, forças generalizadas e tempo (BROOKS, 2011). As formulações Lagrangeana e Hamiltoniana da mecânica são completamente equivalentes às de Newton, mas fornecem soluções drasticamente mais simples para muitos problemas, e são também o ponto de partida para muitos dos desenvolvimentos modernos (TAYLOR, 2013).

## 2 AS LIMITAÇÕES DA MECÂNICA NEWTONIANA E O SURGIMENTO DO FORMALISMO DE LAGRANGE

Mecânica é o estudo de como as coisas se movem: como os planetas se movem ao redor do sol, ou como um elétron se move em torno do núcleo de um átomo. Pelo que sabemos, os gregos foram os primeiros a pensar sobre a mecânica, há mais de dois mil anos, e a mecânica grega representa um passo na evolução da ciência moderna. Entretanto as ideias gregas eram, de acordo com os padrões modernos, seriamente falhas. O desenvolvimento da mecânica como a conhecemos, teve início com os trabalhos de Galileu (1564 - 1642) e Newton (1642 - 1727), e é a formulação de Newton, com as suas três leis do movimento que foi o ponto de partida para a mecânica clássica (TAYLOR, 2013).

Todas as leis abrangem as leis de conservação de energia, momentum e momentum angular. A segunda lei e a terceira são mencionadas em seu famoso livro: *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (Princípios Matemáticos de Filosofia Natural), publicado em 1687. Praticamente desde a sua formulação com base nos princípios, as três leis do movimento vem sendo alvo de controvérsias, quanto ao seu conteúdo físico e consistência lógica, gerando propostas de reformulação da versão tradicional com o intuito de escapar às críticas (CARTWRIGHT; PIRO, 1992). A mecânica Newtoniana foi um marco para a física, pois demonstrou como a natureza se comportava, definiu cada aspecto do movimento dos corpos celestes, estabelecendo leis imutáveis, evidenciando os trabalhos de Galileu, Copérnico e Kepler. Porém, para sistemas com diversas partículas, a mecânica newtoniana exigia o cálculo das forças internas entre essas partículas, o que poderia tornar a equação do movimento mais complexa, sendo assim algo bastante limitante para a mecânica newtoniana. Contudo, até hoje o trabalho de Sir Isaac Newton, possui bastante credibilidade, especificamente, a lei da gravitação universal, onde os astrônomos ganharam mais uma ferramenta para auxiliar nos seus estudos de observação sobre a movimentação de um corpo a cerca de uma determinada posição no espaço.(TAYLOR, 2013).

Essa limitação na mecânica clássica foi preenchida por Lagrange por meio do seu formalismo, que permitiu escrever as equações do movimento a partir de uma única função escalar. Porém, o conhecimento científico está sempre sujeito a mudanças, uma nova forma de resolver um determinado problema pode surgir, ou uma visão diferente acerca da natureza pode levar para um novo patamar. Assim, se deu com a mecânica newtoniana, que sofreu com algumas limitações, ocasionando sua reformulação pelos matemáticos Euler, Lagrange e Hamilton (BROOKS, 2011).

Embora a mecânica clássica tenha sido substituída pela mecânica relativística e pela mecânica quântica em seus respectivos domínios, há, ainda, uma vasta gama de problemas e tópicos interessantes, nos quais produz uma descrição completa e acurada dos possíveis movimentos. Com o advento da teoria do caos nas últimas décadas, a pesquisa

em mecânica clássica se intensificou (BROOKS, 2011). Na mecânica Newtoniana existem diversas aplicações e maneiras de solucionar problemas físicos, aqui vem-se apresentar os dois formalismos. Muitos fenômenos da natureza têm a mesma forma matemática que a força de uma mola, a mecânica Newtoniana pode ser incorporada na conhecida lei de Hooke, onde pode-se calcular a deformação de uma mola, na qual uma força restauradora tende a fazê-la a voltar o seu estado natural. A força elástica é uma importante aplicação das leis de Newton, que possibilita compreender a terceira lei: ação e reação (LEMOS, 2007).

### 3 CÁLCULO DAS VARIAÇÕES

O cálculo de variações é um problema matemático que consiste em buscar máximos e mínimos de funções contínuas definidas sobre algum espaço funcional. Os problemas que envolvem máximos e mínimos de funções são chamados na literatura de problemas variacionais (LEMOS, 2007).

Os problemas que envolvem máximos e mínimos de funções são dados dois pontos  $(t_1, y_1)$  e  $(t_2, y_2)$  no plano, determinar a curva de menor comprimento que as une.

$$y : [t_1, t_2] \rightarrow R; y(t_1) = y_1; y(t_2) = y_2 \quad (1)$$

Onde  $y$  é uma função continuamente diferenciável.

$$J(y) = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 + y'(t)^2} dt \quad (2)$$

Um dos problemas ao cálculo variacional é o de encontrar uma função  $y=y(x)$ , satisfazendo as condições de contorno  $y(x_1)=y_1$  e  $y(x_2)=y_2$  que faça com que o funcional

$$J(y) = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y') dx \quad (3)$$

onde  $f(x, y, y')$  é uma função classe  $C^1$ , tenha valor mínimo ou máximo. Esse processo é chamado de minimizar ou maximizar o funcional.

#### 3.1 O PROBLEMA DA BRAQUISTÓCRONA

O problema inaugural e mais célebre do cálculo das variações é o da linha de deslizamento mais rápido, ou braquistócrona, proposto como desafio aos matemáticos europeus, em 1696, por Johann Bernoulli e resolvido, muito antes do aparecimento da equação de Euler, pelo próprio desafiador e, independentemente, por l'Hôpital, Jakob Bernoulli, Gottfried Leibnitz e Isaac Newton<sup>1</sup>. O problema consiste em determinar a curva unindo dois pontos dados  $P$  e  $Q$ , não pertencentes a uma mesma reta vertical, que possua a propriedade de que, sob a ação da gravidade, uma partícula deslize (sem atrito) ao longo dela no menor tempo possível (LEMOS, 2007). Escolhamos a origem no ponto  $P$  e orientemos o eixo  $y$  verticalmente para baixo. Depois de cair uma altura  $y$  o módulo da velocidade da partícula é  $\frac{ds}{dt} = v = \sqrt{2gy}$ . Usando  $ds = \sqrt{1 + y'^2} dx$ , o tempo gasto para deslizar da posição  $P = (0, 0)$  até  $Q = (x_0, y_0)$  é:

$$T[y] = \int_P^Q \frac{ds}{v} = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{x_0} \left( \frac{1 + y'^2}{y} \right)^{\frac{1}{2}} dx, y(0) = 0, y(x_0) = y_0$$

<sup>1</sup> Na noite de 29 de janeiro de 1697, quando recebeu a carta-desafio, Newton não dormiu até resolver o problema, o que se deu por volta de quatro horas da manhã. Em seguida, a solução foi remetida anonimamente para Bernoulli. Ao ler a solução chegada da Inglaterra, Johann Bernoulli, segundo suas próprias palavras, reconheceu imediatamente o seu auto como se reconhece o leão por sua pata.

A resolução deste problema é facilitada pela escolha de  $y$  como variável independente e da curva na forma  $x(y)$ . Neste caso, com  $x' = \frac{dx}{dy}$

$$T[x] = \frac{1}{2g} \int_0^{y_0} \left( \frac{1+x'^2}{y} \right)^{\frac{1}{2}} dy, x(0) = 0, x(y_0) = x_0$$

Para o problema assim formulado tem-se  $f(x, x', y) = \sqrt{(1+x'^2)/y}$  e é a equação de Euler que permite uma primeira integração imediata:

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial x'} \right) = 0 \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x'} = \frac{x'}{y(1+x'^2)} = C_1$$

Onde  $C_1$  é uma constante arbitrária. Esta última equação integra-se mais facilmente introduzindo-se o parâmetro  $t$  através da equação  $x' = tant$ . Então, com  $C_2 = 1/C_1^2$ ,

$$y = C_2 \frac{\tan^2 t}{1 + \tan^2 t} = C_2 \text{sen}^2 t = \frac{C_2}{2} (1 - \cos 2t);$$

$$dx = tant dy = 2C_2 \text{sen}^2 t dt = C_2 (1 - \cos 2t) dt \rightarrow x = \frac{C_2}{2} (2t - \text{sen} 2t) + C_3$$

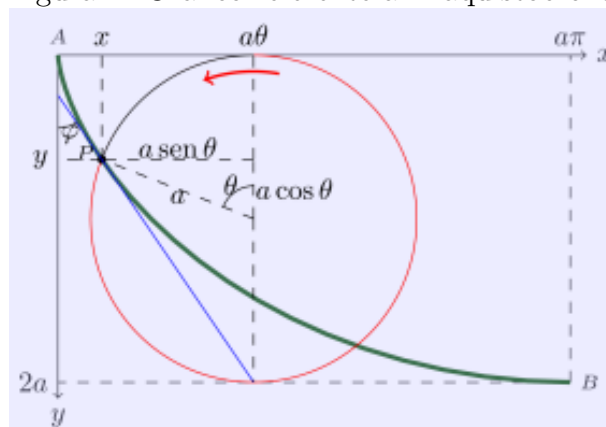
Tendo em conta que  $C_3 = 0$  por que  $y = 0$  para  $x = 0$ , e fazendo  $\theta = 2t$ , resultam nas equações paramétricas de uma família de ciclóides:

$$x = C(\theta - \text{sen} \theta)$$

$$y = C(1 - \cos \theta)$$

A constante  $C = C_2/2$  é determinada pela condição de que a curva passe pelo ponto  $Q = (x_0, y_0)$ . Portanto, a braquistócrona é um arco de ciclóide.

Figura 1: Gráfico referente a Braquistócrona



Fonte: Andrade Filho (2015)



## 4 FORMALISMO DE LAGRANGE

O formalismo de Lagrange permite obter as equações de movimento de um modo elegante e sistemático ao definir os métodos baseados nas leis de Newton. Este formalismo não exige a identificação das forças envolvidas, o que torna a análise mais abstrata. Contudo, é possível simplificar o tratamento de sistemas de maior complexidade, especialmente, quando não é relevante a determinação das forças associadas às restrições ao movimento das suas partículas (LEMOS, 2007).

As coordenadas generalizadas foi o primeiro exemplo, em que se aplicou o formalismo de lagrange é utilizado é em coordenadas generalizadas, a posição de uma partícula fica definida pelo seu raio vetor de posição  $\vec{r}$ , cujas componentes são as suas coordenadas cartesianas  $x, y$  e  $z$ . Para um sistema de  $N$  partículas, serão necessárias  $N$  raios vetores de posição, ou seja,  $3N$  coordenadas. Porém, é possível conhecer a posição de determinados sistemas a partir de um número de variáveis inferior a  $3N$ . Se uma partícula for obrigada a mover-se sobre uma superfície de uma esfera, ou sobre o plano  $xy$ , precisa-se de 2 parâmetros para definir sua posição no espaço. Caso a partícula se desloque ao longo de uma linha conhecida, a sua posição ficará especificada de uma única variável (LEMOS, 2007).

Na formulação da mecânica lagrangeana, cada sistema mecânico é caracterizado por uma determinada função, no caso geral, esta função depende das coordenadas generalizadas ( $q$ ), das suas derivadas temporais ( $\dot{q}$ ) e também do tempo ( $t$ ). Esta função designa-se lagrangeana do sistema, sendo representada habitualmente por:

$$L(q, \dot{q}, t)$$

A lagrangiana pode ser escrita na forma:

$$L = T - U$$

Onde  $T$  é a soma das energias cinéticas das partículas do sistema e  $U$  a sua energia potencial, onde se incluem os efeitos de todas as forças conservativas.

## 5 EQUAÇÃO DE EULER-LAGRANGE

A integral com essa forma:

$$\delta \int_{x_1}^{x_2} f[(y(x), y', (x))] dx$$

onde  $y(x)$  é ainda uma curva desconhecida ligando os pontos isto é:

$$y(x_1) = y_1$$

$$y(x_2) = y_2$$

Todas as curvas possíveis ou seja, ligando os pontos 1 e 2. O caminho  $y = y(x)$  entre os pontos 1 e 2 é o menor caminho, aquele para o qual a integral  $\delta$  é um mínimo.

$$\delta = \int_{x_1}^{x_2} f[y, y', x] dx = \int_{x_1}^{x_2} f[y + \alpha\eta, y' + \alpha\eta', x] dx$$

Para derivar em relação a  $\eta$  observe que  $\alpha$  no integrando  $f$ , logo, torna-se necessário efetuar o seguinte cálculo

$$\frac{\partial f(y + \alpha\eta, y' + \alpha\eta', x)}{\partial \alpha} = \eta \frac{\partial f}{\partial y} + \eta' \frac{\partial f}{\partial y'}$$

e, para

$$\frac{d\delta}{d\alpha}$$

que deve ser zero.

$$\frac{d\delta}{d\alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial \alpha} dx = \int_{x_1}^{x_2} (\eta \frac{\partial f}{\partial y} + \eta' \frac{\partial f}{\partial y'}) dx = 0 = \int_{x_1}^{x_2} \eta'(x) \frac{\partial f}{\partial y'} dx = \left[ \eta(x) \frac{\partial f}{\partial y'} \right]_{x_1}^{x_2}$$

$$- \int_{x_1}^{x_2} \eta(x) \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) dx$$

$$\int_{x_1}^{x_2} \eta'(x) \frac{\partial f}{\partial y'} dx = - \int_{x_1}^{x_2} \eta(x) \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) dx$$

Substituindo, obtemos

$$\int_{x_1}^{x_2} \eta(x) \left( \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right) dx = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} = 0 \tag{4}$$

Essa é a equação de Euler-Lagrange, em homenagem ao matemático suíço Leonard Euler e ao físico e matemático franco-italiano Joseph Lagrange, que permite determinar o caminho para encontrar como resultado, a integral de  $\delta$  é um extremo.

## 5.1 EQUIVALÊNCIA ENTRE AS EQUAÇÕES DE NEWTON E LAGRANGE

Nesta seção, foi considerado o estudo do movimento de uma partícula, as coordenadas generalizadas estão trabalhando em um sistema de coordenadas retangulares. A equação (5) vai evoluir para equação (6), a langrangiana é definida como a diferença da energia cinética(T) e a energia potêncial(U).

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = 0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) = 0 \quad (6)$$

$$L = T - U \quad (7)$$

Substituindo a equação (5) pela equação (6), evoluiu para a equação (7). Considerando o sistema de coordenadas retangulares em um sistema de conservativo, a energia cinética (T) depende da velocidade e a energia potêncial (U) depende da posição.

$$\frac{\partial(T - U)}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial(T - U)}{\partial \dot{x}_i} \right] = 0 \quad (8)$$

$$T = T(\dot{x}_i) \quad (9)$$

$$U = U(x_i) \quad (10)$$

Segue abaixo as derivadas parciais. As derivadas (7) e (8) foram substituídas na equação (5) que evoluiu para a equação (9).

$$\frac{\partial T}{\partial x_i} = 0 \quad (11)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \dot{x}_i} = 0 \quad (12)$$

$$-\frac{\partial U}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \right) = 0 \quad (13)$$

$$-\frac{\partial U}{\partial \dot{x}_i} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \right) \quad (14)$$

$$F_i = -\frac{\partial U}{\partial x_i} \quad (15)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} \left( \sum_{j=1}^3 \frac{1}{2} m \dot{x}_j^2 \right) \quad (16)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{y}_i} \right) = \frac{d}{dt} (m \dot{x}_i) = \dot{P}_i \quad (17)$$

Podemos reorganizar as equações (14), (15) e (17) que evolui para equação (18), onde a força é igual a taxa de variação temporal da quantidade de movimento linear.

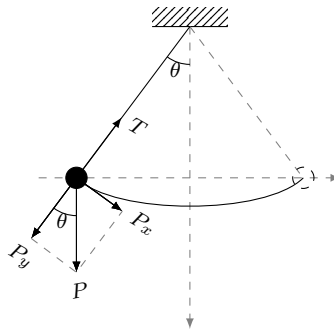
$$F_i = \dot{P}_i \quad (18)$$

Foi utilizado o formalismo lagrangiano para a obtenção do princípio fundamental da dinâmica de acordo com a visão newtoniana, isso mostra que as equações de Newton e Lagrange são equivalentes (THORNTON; MARION, 2011).

## 5.2 O PÊNDBULO SIMPLES PELO FORMALISMO NEWTONIANO E LAGRANGEANO

O pêndulo consiste de um corpo de massa ( $m$ ) suspenso a partir de um pivô por uma corda de comprimento  $l$ . Supõe-se que a corda não possui massa e que o movimento oscilatório do pêndulo ocorre em um plano e não há resistência do ar. Podemos descrever a posição da massa ( $m$ ) usando coordenadas cartesianas ( $x, y$ ). Neste caso, devemos notar que  $x$  e  $y$  não são completamente independentes, pois a massa não pode mover-se livremente mas está sempre presa à corda de comprimento  $l$ . Matematicamente, isso significa que existe o vínculo (THORNTON; MARION, 2011).

Figura 2: Pêndulo Simples



Fonte: Elaborada pelo autor (2024)

$$x^2 + y^2 = l^2$$

Por causa disso, o pêndulo tem na verdade apenas um grau de liberdade. Quando  $x$  muda, a variação em  $y$  está completamente determinada pela equação (33):

$$y = \sqrt{l^2 - x^2}$$

Usando a equação acima, tudo pode ser expresso em termos de  $x$ , porém, uma maneira muito mais conveniente de descrever o movimento do pêndulo é usar o ângulo  $\theta$  entre o pêndulo e sua posição de equilíbrio na vertical. Cada valor do ângulo  $\theta$  corresponde a uma posição específica da massa  $m$ . Esta é outra maneira de expressar que o sistema possui apenas um grau de liberdade. As coordenadas cartesianas estão relacionadas a  $\theta$  por:

$$x = l \sin \theta$$

$$y = l \cos \theta$$

As equações de movimento para o pêndulo duplo foram obtidas utilizando o formalismo Newtoniano e Lagrangiano.

### 5.2.1 Descrição Newtoniana

No formalismo newtoniano é preciso destacar as forças que estão atuando no sistema. Há duas forças atuando no pêndulo. A força gravitacional  $\vec{F}_G$ , que é a força que faz com que o pêndulo tente retornar à posição de equilíbrio e, portanto, balance; e a força de tensão  $\vec{T}$  feita pela corda sobre o corpo, que é a força que evita que o corpo caia.

Como a força gravitacional sempre aponta para baixo, posso descreve-la da seguinte maneira:

$$\vec{F}_G = (mg)$$

A força de tensão  $\vec{T}$  atua ao longo da corda, apontando para cima e tem sempre módulo T .

$$\vec{T} = (-T \text{sen}\theta - T \text{cos}\theta)$$

Escrevendo a segunda lei de Newton:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\vec{p}) &= \vec{F} = \vec{F}_G + \vec{T} \\ \frac{d}{dt}\vec{p} &= (mg) + (-T \text{sen}\theta - T \text{cos}\theta) \end{aligned}$$

como

$$\begin{aligned} p &= (m\dot{x}; m\dot{y}) \\ \frac{d}{dt}(m\dot{x}m\dot{y}) &= (mg) + (-T \text{sen}\theta - T \text{cos}\theta) \\ (m\ddot{x}; m\ddot{y}) &= (mg) + (-T \text{sen}\theta - T \text{cos}\theta) \end{aligned}$$

A primeira linha da equação matricial acima nos diz que:

$$m\ddot{x} = -T \text{sen}\theta$$

Usando a equação acima, obtemos:

$$m\ddot{x} = -T \frac{x}{l}$$

A segunda linha da equação matricial acima nos diz que:

$$m\ddot{y} = mg - T \text{cos}\theta$$

Usando a equação acima, obtemos:

$$m\ddot{y} = mg - T \frac{y}{l}$$

Para mudar para a descrição do pêndulo em termos do ângulo  $\theta$ , precisamos escrever as derivadas  $\ddot{x}$  e  $\ddot{y}$  em termos de  $\theta$ . Como descrito abaixo:

$$\begin{aligned}x &= l \operatorname{sen} \theta \\ \dot{x} &= l \cos \theta \dot{\theta} \\ \ddot{x} &= -l \operatorname{sen} \theta \dot{\theta} + l \cos \theta \ddot{\theta}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y &= l \cos \theta \\ \dot{y} &= -l \operatorname{sen} \theta \dot{\theta} \\ \ddot{y} &= -l \cos \theta \dot{\theta} - l \operatorname{sen} \theta \ddot{\theta}\end{aligned}$$

Substituindo as equações obtemos

$$\begin{aligned}m(-l \operatorname{sen} \theta \dot{\theta} + l \cos \theta \ddot{\theta}) &= -T \operatorname{sen} \theta \\ m(-l \cos \theta \dot{\theta} - l \operatorname{sen} \theta \ddot{\theta}) &= mg - T \cos \theta\end{aligned}$$

Multiplicando a equação acima por  $\operatorname{sen} \theta$  e a outra equação por  $\cos \theta$  e somando ambas:

$$\begin{aligned}m(-l \operatorname{sen}^2 \theta \dot{\theta} + l \cos \theta \operatorname{sen} \theta \ddot{\theta}) &= -T \operatorname{sen}^2 \theta \\ m(-l \cos^2 \theta \dot{\theta} - l \cos \theta \operatorname{sen} \theta \ddot{\theta}) &= mg \cos \theta - T \cos^2 \theta\end{aligned}$$

$$-ml \dot{\theta} = -T + mg \cos \theta$$

$$T = ml \dot{\theta} + mg \cos \theta \quad (19)$$

Derivando a equação (19):

$$\begin{aligned}0 &= ml \ddot{\theta} - mg \operatorname{sen} \theta \\ mg \operatorname{sen} \theta &= ml \ddot{\theta}\end{aligned}$$

$$\ddot{\theta} = \frac{g}{l} \operatorname{sen} \theta \quad (20)$$

A equação (19) nos dá as tensão na corda. Já a equação (20) é a equação de movimento para o pêndulo. Dadas condições iniciais, a equação (20) pode ser resolvida para  $\theta(t)$  nos dizendo como o pêndulo oscila. Veremos agora como obter a equação de movimento no formalismo lagrangiano.

### 5.2.2 Descrição Lagrangiana

O pêndulo simples é descrito utilizando o método dos multiplicadores de Lagrange, onde o pêndulo usando a lagrangeana para uma partícula, movendo-se livremente em duas dimensões.

$$L = T - V = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + mgy \quad (21)$$

adicionamos o termo do multiplicador de Lagrange,

$$L = \frac{1}{2}\lambda(x^2 + y^2 - l^2) \quad (22)$$

Para descrever a lagrangiana do pêndulo:

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + mgy + \frac{1}{2}\lambda(x^2 + y^2 - l^2) \quad (23)$$

Onde  $\lambda$  é o multiplicador de Lagrange, apartir da lagrangiana do pêndulo acima, pode-se obter a equação do movimento usando a equação de Euler-Lagrange.

$$\frac{\partial L}{\partial q} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \quad (24)$$

Para  $q = x$ :

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) \quad (25)$$

Substituindo a equação(25) nesta equação:

$$\frac{\partial [\frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + mgy + \frac{1}{2}\lambda(x^2 + y^2 - l^2)]}{\partial x} = \quad (26)$$

$$= \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial [\frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + mgy + \frac{1}{2}\lambda(x^2 + y^2 - l^2)]}{\partial \dot{x}} \right] \quad (27)$$

Calculando as derivadas:

$$\lambda x = m\ddot{x} \quad (28)$$

Agora  $q = y$  na equação(27):

$$\frac{\partial L}{\partial y} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right)$$

Substituindo(25) nesta equação:

$$\frac{\partial [\frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + mgy + \frac{1}{2}\lambda(x^2 + y^2 - l^2)]}{\partial y} = \quad (29)$$

$$= \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial [\frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + mgy + \frac{1}{2}\lambda(x^2 + y^2 - l^2)]}{\partial \dot{y}} \right] \quad (30)$$



Calculando as derivadas:

$$mg + \lambda y = m\ddot{y} \quad (31)$$

Vemos que  $\lambda = -T$ . Portanto, o multiplicador de Lagrange é diretamente proporcional à tensão  $T$ . Como teste de consistência, podemos calcular a equação de Euler-Lagrange para  $q = \lambda$ :

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\lambda}} \right) \quad (32)$$

Substituindo:

$$\frac{\partial \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + mgy + \frac{1}{2}\lambda(x^2 + y^2 - l^2)}{\partial \lambda} = \quad (33)$$

$$= \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \left( \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + mgy + \frac{1}{2}\lambda(x^2 + y^2 - l^2) \right)}{\partial \dot{\lambda}} \right) \quad (34)$$

Calculando as derivadas:

$$\frac{1}{2}(x^2 + y^2 - l^2) = 0 \rightarrow \quad (35)$$

$$\rightarrow x^2 + y^2 - l^2 \quad (36)$$

Esta é exatamente a condição de vínculo da equação(26). A equação de Euler-Lagrange é válida para qualquer escolha de sistema de coordenadas. Neste caso, usando as equações a lagrangiana associada ao multiplicador de Lagrange torna-se:

$$L = \frac{1}{2}\lambda(x^2 + y^2 - l^2) \quad (37)$$

$$= \frac{1}{2}\lambda(l^2 \text{sen}^2\theta + l^2 \text{cos}^2\theta - l^2) \quad (38)$$

$$= \frac{1}{2}\lambda(l^2 - l^2) \quad (39)$$

$$= 0 \quad (40)$$

Portanto, em termos da coordenada  $\theta$  a lagrangiana do pêndulo torna-se:

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + mgy \quad (41)$$

$$= \frac{1}{2}m[(l\dot{\theta}\text{cos}\theta)^2 + (-l\dot{\theta}\text{sen}\theta)^2] + mgl\text{cos}\theta \quad (42)$$

$$= \frac{1}{2}[l^2 2\text{cos}^2\theta + l^2\dot{\theta}^2 \text{sen}^2\theta] = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2[\text{cos}^2\theta + \text{sen}^2\theta] = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 \quad (43)$$

$$= \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl\text{cos}\theta \quad (44)$$

Usando agora a equação de Euler-Lagrange para  $q = \theta$ , obtemos

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) \quad (45)$$

Substituindo:

$$\frac{\partial(\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl\cos\theta)}{\partial\theta} = \quad (46)$$

$$= \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial(\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl\cos\theta)}{\partial\dot{\theta}} \right] \quad (47)$$

Calculando as derivadas:

$$-mgl\sin\theta = ml^2\ddot{\theta} \quad (48)$$

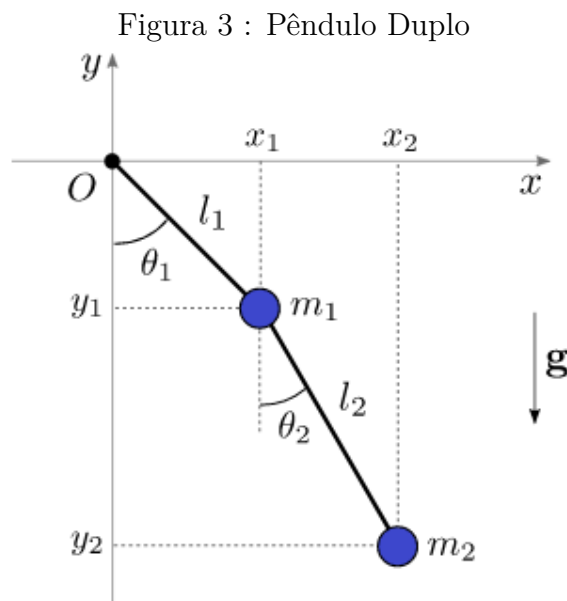
Rearranjando:

$$\ddot{\theta} = \frac{g}{l}\sin\theta \quad (49)$$

A equação do movimento, apresentada acima, foi obtida usando o formalismo newtoniano, o que permitiu que fosse encontrada de uma maneira muito mais simples. No formalismo lagrangeano tivemos apenas que descobrir como escrever a energia cinética e a energia potencial em termos da coordenada angular. Em seguida, como a equação de Euler-Lagrange é válida para qualquer escolha de coordenadas, foi possível deduzir a equação de movimento sem nos preocuparmos com as forças e suas direções. Em geral, no formalismo lagrangeano, depois de encontrarmos coordenadas adequadas para as quais os vínculos tornam-se trivialmente verdadeiros, não precisamos nos preocupar mais com os vínculos. Isso ocorre porque os vínculos são implementados no formalismo lagrangeano usando multiplicadores e, para uma escolha adequada de coordenadas, os termos envolvendo os multiplicadores de Lagrange se anulam.

## 6 O PÊNDBULO DUPLO

O pêndulo duplo é um sistema com dois pêndulos sendo um deles anexo no extremo do outro. Este é um sistema físico simples que apresenta um complexo comportamento dinâmico com alta sensibilidade em torno das condições iniciais. O movimento do pêndulo duplo é regido por um conjunto fechado de equações diferenciais ordinárias. Para sistemas com energia específica, seu comportamento é caótico. Aqui apresento o método newtoniano e o lagrangiano na resolução do pêndulo.



Fonte: Elaborada pelo autor (2024)

### 6.1 O PÊNDBULO DUPLO PELO MÉTODO NEWTONIANO

O pêndulo duplo é constituído de duas massas  $m_1$  e  $m_2$ , conectadas por cordas de massa desprezível e de comprimento  $l_1$  e  $l_2$ . O sistema todo está sujeito à força gravitacional e às restrições nos fios que conectam as massas por meio de suas articulações. Supondo-se que o sistema de coordenadas tem origem no topo de suspensão, e por haver duas partículas, então a posição dessas partículas pode ser escrita em termos de coordenadas gerais, como  $r_1$  e  $r_2$ , com componentes do tipo  $(x_i, y_i, z_i)$ , que podem ser escritos em termos de suas restrições.

$$\begin{aligned} z_1 &= 0 \\ z_2 &= 0 \\ |r_1| &= l_1 \\ |r_1 - r_2| &= l_2 \end{aligned}$$

Podemos expressar em termos de coordenadas gerais, as posições das partículas.

$$\begin{aligned} r_1 &= l_1(\text{sen}\theta_1, \text{cos}\theta_1, \theta) \\ r_2 &= r_1 + l_2(\text{sen}\theta_2, \text{cos}\theta_2, \theta) \end{aligned}$$

Para encontrar a velocidade e aceleração da primeira partícula:

$$\begin{aligned} r_1 &= l_1(\text{sen}\theta_1, \text{cos}\theta_1) \\ \dot{r}_1 &= v_1 = l_1\dot{\theta}_1(\text{cos}\theta_1, -\text{sen}\theta_1) \\ \ddot{r}_1 &= a_1 = l_1\ddot{\theta}_1(\text{cos}\theta_1, -\text{sen}\theta_1) - l_1\dot{\theta}_1^2(\text{sen}\theta_1, \text{cos}\theta_1) \end{aligned}$$

Segunda partícula:

$$\begin{aligned} r_2 &= r_1 + l_2(\text{sen}\theta_2, \text{cos}\theta_2) \\ \dot{r}_2 &= v_2 = v_1 + l_2\dot{\theta}_2(\text{cos}\theta_2, -\text{sen}\theta_2) \\ \ddot{r}_2 &= a_2 = a_1 + l_2\ddot{\theta}_2(\text{cos}\theta_2, -\text{sen}\theta_2) - l_2\dot{\theta}_2^2(\text{sen}\theta_2, \text{cos}\theta_2) \end{aligned}$$

As forças envolvidas no sistema de pêndulo duplo atuam nas massas  $m_1$ , por meio da tensão nas duas articulações e a força gravitacional. A tensão sobre a articulação mais acima, no topo de suspensão, está ao longo da direção  $-r_1$ , a força de tensão da massa  $m_1$  até a articulação inferior está distribuída ao longo da direção  $r_2 - r_1$ , desse modo, a força  $F_1$  pode ser escrita como:

$$F_1 = T_1 \frac{-r_1}{|r_1|} + T_2 \frac{r_2 - r_1}{|r_2 - r_1|} + m_1 g = -\frac{T_1}{l_1} r_1 + \frac{T_2}{l_2} (r_2 - r_1) + m_1 g$$

As forças atuando sobre  $m_2$ , são a tensão devido à articulação inferior e a gravidade. A tensão em  $m_2$  distribui-se ao longo da direção  $-(r_2 - r_1)$ .

$$F_2 = T_2 \frac{-(r_2 - r_1)}{|r_2 - r_1|} + m_2 g = -\frac{T_2}{l_2} (r_2 - r_1) + m_2 g$$

Usando a segunda lei de Newton para descrever a força nas respectivas partículas:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{r}_1 &= -\frac{T_1}{l_1} r_1 + \frac{T_2}{l_2} (r_2 - r_1) + m_1 g \\ m_2 \ddot{r}_2 &= -\frac{T_2}{l_2} (r_2 - r_1) + m_2 g \end{aligned}$$

Considerando que a movimentação está restrita ao plano  $xOy$ , então as equações em termos das coordenadas gerais e as incógnitas  $\theta_1, \theta_2$ ,  $T_1$  e  $T_2$  são:

$$\begin{aligned} m_1 l_1 (\ddot{\theta}_1 \text{cos}\theta_1 - \dot{\theta}_1^2 \text{sen}\theta_1) &= -T_1 \text{sen}\theta_1 + T_2 \text{sen}\theta_2 \\ -m_1 l_1 (\ddot{\theta}_1 \text{sen}\theta_1 + \dot{\theta}_1^2 \text{cos}\theta_1) &= -T_1 \text{cos}\theta_1 + T_2 \text{cos}\theta_2 + m_1 g \\ m_2 (l_1 \ddot{\theta}_1 \text{cos}\theta_1 - l_1 \dot{\theta}_1^2 \text{sen}\theta_1 + l_2 \ddot{\theta}_2 \text{cos}\theta_2 - l_2 \dot{\theta}_2^2 \text{sen}\theta_2) &= -T_2 \text{sen}\theta_2 \\ -m_2 (l_1 \ddot{\theta}_1 \text{sen}\theta_1 + l_1 \dot{\theta}_1^2 \text{cos}\theta_1 + l_2 \ddot{\theta}_2 \text{sen}\theta_2 - l_2 \dot{\theta}_2^2 \text{cos}\theta_2) &= -T_2 \text{cos}\theta_2 + m_2 g \end{aligned}$$

Para simplificar as equações acima, multiplica-se por  $\cos\theta_1$ ,  $-\sin\theta_1$  e tem-se respectivamente:

$$\begin{aligned} m_1 l_1 (\ddot{\theta}_1 \cos^2 \theta_1 - \dot{\theta}_1^2 \sin \theta_1 \cos \theta_1) &= -T_1 \sin \theta_1 \cos \theta_1 + T_2 \sin \theta_2 \cos \theta_1 \\ m_1 l_1 (\ddot{\theta}_1 \sin^2 \theta_1 + \dot{\theta}_1^2 \cos \theta_1 \sin \theta_1) &= T_1 \cos \theta_1 \sin \theta_1 - T_2 \cos \theta_2 \sin \theta_1 - m_1 g \sin \theta_1 \end{aligned}$$

Somando  $\cos^2 \theta_1 + \sin^2 \theta_1 = 1$  e  $\sin(\theta_2 - \theta_1) = \sin \theta_2 \cos \theta_1 - \sin \theta_1 \cos \theta_2$ , obtém-se :

$$l_1 \ddot{\theta}_1 = \frac{T_2}{m_1} \sin(\theta_2 - \theta_1) - g \sin \theta_1$$

De maneira análoga, podemos multiplicar a equação acima por  $\sin\theta_1$ , e a equação seguinte por  $\cos\theta_1$ , obtém-se respectivamente:

$$\begin{aligned} m_1 l_1 (\ddot{\theta}_1 \cos \theta_1 \sin \theta_1 - \dot{\theta}_1^2 \sin^2 \theta_1) &= -T_1 \sin^2 \theta_1 + T_2 \sin \theta_2 \sin \theta_1 \\ -m_1 l_1 (\ddot{\theta}_1 \sin \theta_1 \cos \theta_1 - \dot{\theta}_1^2 \cos^2 \theta_1) &= -T_1 \cos^2 \theta_1 + T_2 \cos \theta_2 \sin \theta_1 + m_1 g \cos \theta_1 \end{aligned}$$

Somando  $\cos^2 \theta_1 + \sin^2 \theta_1 = 1$  e  $\cos(\theta_2 - \theta_1) = \sin \theta_2 \sin \theta_1 + \cos \theta_1 \cos \theta_2$  :

$$l_1 \dot{\theta}_1^2 = \frac{T_1}{m_1} - \frac{T_2}{m_1} \cos(\theta_2 - \theta_1) - g \cos \theta_1$$

Multiplicando a equação acima por  $\cos\theta_2$  e a próxima por  $\sin\theta_2$ , tem-se respectivamente:

$$\begin{aligned} m_2 (l_1 \ddot{\theta}_1 \cos \theta_1 \cos \theta_2 - l_1 \dot{\theta}_1^2 \sin \theta_1 \cos \theta_2 + l_2 \ddot{\theta}_2 - l_2 \dot{\theta}_2^2 \sin \theta_2 \cos \theta_2) &= -T_2 \sin \theta_2 \cos \theta_2 \\ -m_2 (l_1 \ddot{\theta}_1 \sin \theta_1 \sin \theta_2 + l_1 \dot{\theta}_1^2 \cos \theta_1 \cos \theta_2 + l_2 \ddot{\theta}_2 + l_2 \dot{\theta}_2^2 \sin^2 \theta_2 + l_2 \dot{\theta}_2^2 \cos \theta_2 \sin \theta_2) &= \\ &= -T_2 \cos \theta_2 \sin \theta_2 + m_2 g \sin \theta_2 \end{aligned}$$

Subtraindo  $\cos^2 \theta_2 + \sin^2 \theta_2 = 1$  e  $\cos(\theta_2 - \theta_1) = \sin \theta_2 \sin \theta_1 + \cos \theta_2 \cos \theta_1$ ,  $\sin(\theta_2 - \theta_1) = \sin \theta_2 \cos \theta_1 - \sin \theta_1 \cos \theta_2$ , tem-se:

$$l_1 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_2 - \theta_1) + l_1 \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_2 - \theta_1) + l_2 \ddot{\theta}_2 = -g \sin \theta_2$$

Multiplicando por  $\sin\theta_2$ ,  $\cos\theta_2$ , tem-se respectivamente:

$$\begin{aligned} m_2 (l_1 \ddot{\theta}_1 \cos \theta_1 \sin \theta_2 - l_1 \dot{\theta}_1^2 \sin \theta_1 \sin \theta_2 + l_2 \ddot{\theta}_2 \cos \theta_2 \sin \theta_2) &= -T_2 \sin^2 \theta_2 \\ -m_2 (l_1 \ddot{\theta}_1 \cos \theta_2 \sin \theta_2 + l_1 \dot{\theta}_1^2 \cos \theta_1 \cos \theta_2 + l_2 \ddot{\theta}_2 \sin \theta_2 \cos \theta_2 + l_2 \dot{\theta}_2^2 \cos^2 \theta_2) &= \\ &= -T_2 \cos^2 \theta_2 + m_2 g \cos \theta_2 \end{aligned}$$

Somando:

$$l_1 \ddot{\theta}_1 \sin(\theta_2 - \theta_1) + l_1 \dot{\theta}_1^2 \cos(\theta_2 - \theta_1) + l_2 \ddot{\theta}_2 = \frac{T_2}{m_2} - g \cos \theta_2$$

Substituindo as equações e utilizando as identidades trigonométricas pode-se escrever as equações de modo simplificado, como:

$$l_2\ddot{\theta}_2 = -g\text{sen}\theta_2 - \left(\frac{T_2}{m_1} - \text{sen}(\theta_2 - \theta_1) - g\text{sen}\theta_1\right)$$

$$\cos(\theta_2 - \theta_1) - \left[\frac{T_1}{m_1} - \frac{T_2}{m_1}\cos\theta(\theta_2 - \theta_1) - g\cos\theta_1\right]\text{sen}(\theta_2 - \theta_1) = -\frac{T_1}{m_1}\text{sen}(\theta_2 - \theta_1)$$

$$l_2\ddot{\theta}_2 = \frac{T_2}{m_2} - g\cos\theta_2 + \left[\frac{T_2}{m_1} - \text{sen}\theta_2 - \theta_1 - g\text{sen}\theta_1\right]$$

$$\text{sen}(\theta_2 - \theta_1) - \left[\frac{T_1}{m_1} - \frac{T_2}{m_1}\cos\theta(\theta_2 - \theta_1) - g\cos\theta_1\right]\cos(\theta_2 - \theta_1) =$$

$$= \frac{T_2}{m_2} + \frac{T_2}{m_1} - \frac{T_1}{m_1}\cos(\theta_2 - \theta_1)$$

As equações acima, modelam o movimento das partículas:

$$l_1\ddot{\theta}_1 = \frac{T_2}{m_1}\text{sen}(\theta_2 - \theta_1) - g\text{sen}\theta_1$$

$$l_1\dot{\theta}_1^2 = \frac{T_1}{m_1} - \frac{T_2}{m_1}\cos(\theta_2 - \theta_1) - g\cos\theta_1$$

$$l_2\ddot{\theta}_2 = -\frac{T_1}{m_1}\text{sen}(\theta_2 - \theta_1)$$

$$l_2\dot{\theta}_2 = \frac{T_2}{m_2} + \frac{T_2}{m_1} - \frac{T_1}{m_1}\cos(\theta_2 - \theta_1)$$

Desde que as equações não tenham derivadas de  $T_1$  e  $T_2$ , o melhor caminho para solucionar as mesmas, numericamente ou analiticamente, é obtendo duas equações diferenciais para  $\theta_1$  e  $\theta_2$ , sem os termos  $T_1$  e  $T_2$ , e usando suas expressões em termos de  $\theta_1$  e  $\theta_2$ , e suas derivadas. Desse modo, isolando  $T_1$  e  $T_2$  nas equações, obtém-se respectivamente:

$$T_2 = m_1 \frac{l_1\ddot{\theta}_1 + g\text{sen}\theta_1}{\text{sen}(\theta_2 - \theta_1)} \quad (50)$$

$$T_1 = -m_1 \frac{l_2\ddot{\theta}_2}{\text{sen}(\theta_2 - \theta_1)} \quad (51)$$

Substituindo, obtém-se:

$$l_1\dot{\theta}_1^2 = \frac{T_1}{m_1} - \frac{T_2}{m_1}\cos(\theta_2 - \theta_1) - g\cos\theta_1 \rightarrow \quad (52)$$

$$l_1\dot{\theta}_1^2 = \frac{l_2\ddot{\theta}_2}{\text{sen}(\theta_2 - \theta_1)} - \frac{l_1\ddot{\theta}_1 g\text{sen}\theta_1}{\text{sen}(\theta_2 - \theta_1)} - g\cos\theta_1 \rightarrow \quad (53)$$

$$-l_1\dot{\theta}_1^2 \text{sen}(\theta_2 - \theta_1) = l_2\ddot{\theta}_2 + l_1 - g\text{sen}\theta_1 \cos(\theta_2 - \theta_1) \quad (54)$$

De modo análogo, substituindo (24) e (25) em (27), obtém-se:

$$l_2\dot{\theta}_2^2 = \frac{T_2}{m_2} + \frac{T_2}{m_1}\cos(\theta_2 - \theta_1) \rightarrow$$

$$l_2\dot{\theta}_2^2 = \frac{m_1}{m_2} \frac{l_1\ddot{\theta}_1 + g\text{sen}\theta_1}{\text{sen}(\theta_2 - \theta_1)} + \frac{l_1\ddot{\theta}_1 + g\text{sen}\theta_1}{\text{sen}(\theta_2 - \theta_1)} + \frac{l_2\ddot{\theta}_2}{\text{sen}(\theta_2 - \theta_1)}\cos(\theta_2 - \theta_1) \rightarrow$$

$$m_2l_2\dot{\theta}_2^2\text{sen}(\theta_2 - \theta_1) = (m_1 + m_2)g\text{sen}\theta_1 + (m_1 + m_2)l_1\ddot{\theta}_1 + m_2l_2\ddot{\theta}_2\cos(\theta_2 - \theta_1) \quad (55)$$

É possível observar que as equações (26) e (27) modelam suficientemente o sistema do pêndulo duplo, de modo que, apenas a generalização da coordenada  $\theta$  é necessária para a descrição do mesmo. Fica evidente que utilizando o método newtoniano nessa resolução, é suficientemente capaz de descrever o sistema, dadas algumas restrições. A solução para as equações diferenciais (26) e (27) não pode ser alcançada analiticamente, porém pode-se encontrar uma solução numérica ou para condições onde o ângulo  $\theta$  possui uma variação muito pequena. Considerando que a variação do ângulo  $\theta$  é muito pequena, usando a aproximação por polinômio de Taylor<sup>1,2</sup>:

Para  $\theta_1$  e  $\theta_2 \gg 1 \Rightarrow \cos(\theta_2 - \theta_1) \cong 1$ ;  $\text{sen}(\theta_2 - \theta_1) \cong 0$ ,  $\text{sen}\theta_1 \cong \theta_1$ ,  $\text{sen}\theta_2 \cong \theta_2$ . Podemos simplificar as equações, considera-se:

$$l_1 = l_2 = lm_1 = m_2 = m$$

As equações do movimento (26) e (27) tornam-se respectivamente:

$$\ddot{\theta}_2 + \ddot{\theta}_1 + \frac{g^{\theta_2}}{l} = 0$$

$$2\ddot{\theta}_1 + \frac{2g\theta_1}{l} + \ddot{\theta}_2 = 0 \quad (56)$$

Pode-se propor que uma solução dessas equações é do tipo:

$$\theta_k(t) = \Theta_k^e - i\omega t, K = 1e2$$

Substituindo essa solução geral nas equações (28), obtém-se:

$$\begin{cases} \Theta_2(\frac{g}{l} - \omega^2) - \omega^2\Theta_1 = 0 \\ \Theta_1(\frac{2g}{l} - \omega^2) - \omega^2 = 0 \end{cases}$$

<sup>1</sup> Fórmula de Taylor ou Polinômio de Taylor ou Série de Taylor é uma expressão que permite o cálculo do valor de uma função por aproximação local através de uma função polinomial

<sup>2</sup> Brook Taylor foi um matemático britânico. Foi eleito Membro da Royal Society em 1712. Taylor teve um trabalho publicado pelo seu neto após sua morte em 1793, intitulado *Contemplatio Philosophica*.

Abaixo, podemos calcular as frequências fundamentais:

$$M = \left[ -\omega^2 \left( \frac{g}{l} - \omega^2 \right) \left( \frac{2g}{l} - 2\omega^2 \right) - \omega^2 \right]$$

Nessas condições, deve-se encontrar:

$$\det M = 0 \Rightarrow \left( \frac{2g}{l} \right) \left( \frac{g}{l} - \omega^2 \right) - \omega^4 = 0 \Rightarrow$$

$$-\omega^4 - \frac{4g}{l}\omega^2 + \frac{2g^2}{l^2} = 0 \quad (57)$$

Para solucionar a equação (29), fazemos a seguinte substituição:

$$\mu = \omega^2; \alpha = \frac{g}{l}$$

Pode-se reescrever a (29) como:

$$\mu^2 - 4\alpha\mu + 2\alpha^2 = 0$$

Desse modo, a solução para a equação polinomial do segundo grau é dada por:

$$\Delta = 16\alpha^2 - 8\alpha^2 = 8\alpha^2 \Rightarrow \mu(\alpha) = \frac{4\alpha \pm \sqrt{8\alpha^2}}{2}$$

Tem-se :

$$\mu_1(\alpha) = \alpha(2 + \sqrt{2})$$

$$\mu_2(\alpha) = \alpha(2 - \sqrt{2})$$

Logo :

$$\omega_1 = \sqrt{\omega(2 + \sqrt{2})}$$

$$\omega_2 = \sqrt{\omega(2 - \sqrt{2})}$$

Portanto, a combinação das duas frequências é:

$$\theta_k = \Theta_k e^{-i\omega t} = C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}$$

$$\omega_1, \omega_2 \Rightarrow$$

$$\theta_k(t) = C_1 e^{-i^{\alpha(2+\sqrt{2})\sqrt{t}} + C_2 e^{-i^{\alpha(2-\sqrt{2})\sqrt{t}}}$$

A equação acima é a solução geral do problema do pêndulo duplo, porém sem as considerações com respeito das condições iniciais do problema. Essas considerações são necessárias



para determinar os valores de  $C_1$  e  $C_2$ , para isso, considera-se que o pêndulo é solto da posição  $\theta_k(t = 0) = \theta_0$  assim como também, para o mesmo instante, a velocidade no sistema é zero. Nessas condições, o problema de contorno fornece:

Para:

$$\theta_k(t = 0) = 0 \Rightarrow C_1 + C_2 = \theta_0$$

Como a velocidade no instante  $t = 0$  é nula, tem-se:

$$\dot{\theta}_k(t) = -C_1^i \sqrt{\alpha(2 + \sqrt{2})} e^{i[\sqrt{\alpha(2 + \sqrt{2})}]t} - C_2^i \sqrt{\alpha(2 - \sqrt{2})} e^{-i[\sqrt{\alpha(2 - \sqrt{2})}]t};$$

Para:

$$\dot{\theta}_k(t = 0) = 0 \Rightarrow -C_1 \sqrt{\alpha(2 + \sqrt{2})} - C_2 \sqrt{\alpha(2 - \sqrt{2})} = 0$$

O valor das constantes  $C_1$  e  $C_2$ , satisfazem o sistema:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = \theta_0 - C_1 \sqrt{2} - C_2(2 - \sqrt{2}) = 0 \end{cases}$$

Cuja solução é :

$$C_1 = \theta_0 \frac{-2 + \sqrt{2}}{-2 + 2\sqrt{2}}$$

$$C_2 = \theta_0 \frac{\sqrt{2}}{-2 + 2\sqrt{2}}$$

Logo, a equação que representa o movimento do sistema é :

$$\theta_k(t) = \theta_0 \frac{-2 + \sqrt{2}}{-2 + 2\sqrt{2}} e^{-i[\sqrt{\frac{g}{l}(2 + \sqrt{2})}]t} + \theta_0 \frac{\sqrt{2}}{-2 + 2\sqrt{2}} e^{-i[\sqrt{\frac{g}{l}(2 - \sqrt{2})}]t}$$

A modelagem desse sistema por meio das leis de Newton deixa claro que esse método é muito cansativo e extenso, por conta do tratamento vetorial que lhe é dado. Por considerar toda a força envolvida no sistema, o tratamento vetorial aumenta bastante a quantidade de cálculos para a modelagem do mesmo. Ocorre que o método se torna complexo à medida que as restrições são retiradas, por exemplo: para o caso de que no pêndulo duplo a movimentação não fosse apenas no plano e sim no espaço. Descrever o comportamento do sistema é extremamente complexo por se tratar de um fenômeno caótico para essas condições.

### 6.1.1 Aplicação do formalismo lagrangiano

A solução a seguir para a resolução do pêndulo duplo é aplicando o método de Runge-Kutta, em conformidade com o formalismo lagrangiano, o método permite resolver

equações diferenciais numericamente, sem a necessidade do cálculo de derivadas.

$$\begin{aligned}x_1 &= l_1 \sin \theta_1 \\x_2 &= l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin \theta_2 \\y_1 &= -l_1 \cos \theta_1 \\y_2 &= -l_1 \cos \theta_1 - l_2 \cos \theta_2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 \\ \dot{x}_2 &= l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + l_2 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 \\ \dot{y}_1 &= l_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 \\ \dot{y}_2 &= l_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 + l_2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2\end{aligned}$$

A Lagrangeana de um pêndulo duplo é dado por  $L = T - V$ , onde  $T$  e  $V$  são as energias cinéticas e potenciais do sistema, respectivamente. A energia cinética  $T$  é dado por:

$$\begin{aligned}T &= \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_1(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2}m_2(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) \\ &= \frac{1}{2}m_1l_1^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2[l_1^2\dot{\theta}_1^2 + l_2^2\dot{\theta}_2^2 + 2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_1 - \theta_2)]\end{aligned}$$

Em que acima usamos o fato de que  $\cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2 = \cos(\theta_1 - \theta_2)$ . A energia potencial  $V$  é dado por:

$$\begin{aligned}V &= m_1gy_1 + m_2gy_2 = -m_1gl_1 \cos \theta_1 - m_2g(l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_2) \\ &= -(m_1 + m_2)gl_1 \cos \theta_1 - m_2gl_2 \cos \theta_2\end{aligned}$$

O Lagrangeano do pêndulo duplo é:

$$\begin{aligned}L &= \frac{1}{2}(m_1 + m_2)l_1^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2l_2^2\dot{\theta}_2^2 + m_2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ &\quad + (m_1 + m_2)gl_1 \cos \theta_1 + m_2gl_2 \cos \theta_2\end{aligned}$$

O momento associado as coordenadas  $\theta_1$  e a  $\theta_2$  podem ser obtidas diretamente de  $L$ :

$$\begin{aligned}p_{\theta_1} &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} = (m_1 + m_2)l_1^2\dot{\theta}_1 + m_2l_1l_2\dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ p_{\theta_2} &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} = m_2l_2^2\dot{\theta}_2 + m_2l_1l_2\dot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2)\end{aligned}$$

As equações do movimento do sistema são dadas pela equação de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_i} = 0 \implies \frac{d_{p_{\theta_i}}}{dt} - \frac{\partial L}{\partial \theta_i} = 0 \quad (58)$$

Por se tratar de um sistema caótico<sup>3</sup>, a resolução do pêndulo duplo requer um método matemático mais apurado para chegar á uma solução, essas equações podem ser resolvidas através do método de Runge-Kutta, como já foi mencionado acima, logo abaixo o método é apresentado com mais detalhe e com um exemplo para ampliar a compreensão.

---

<sup>3</sup> Pequenas variações no estado inicial do sistema causam grandes divergências em seu comportamento, sistemas caóticos geralmente são descritos por equações não lineares, o que contribui para sua complexidade e comportamento imprevisível. Foi estudado pela primeira vez pelo matemático, físico e filósofo Henri Poincaré (1854 – 1912), seus estudos foram a respeito do equilíbrio na interação entre três corpos gravitacionais do Sistema Solar, conhecido como problema dos três corpos.

## 7 MÉTODO DE RUNGE-KUTTA DE QUARTA ORDEM

O método consiste na estimativa do valor da função em vários pontos intermediários. O ponto final será a média ponderada entre esses pontos intermediários, o método é baseado na série de Taylor e sua ordem será definida pela ordem da série de Taylor. Por volta de 1900, os matemáticos alemão, Carl David Tolmé Runge e Martin Wilhelm Kutta aprimoraram os métodos iterativos para resolução de Equações Diferenciais Ordinárias de uma forma extremamente precisa. Como Heun, eles perceberam que quanto mais inclinações (derivadas) fossem calculadas, melhor seria a precisão, sendo cada inclinação associada a um determinado coeficiente de compensação. Assim, analisando o trabalho de Heun, foi possível dar continuidade àquele raciocínio já desenvolvido pelo Alemão (CARTWRIGHT; PIRO, 1992). A versão de segunda ordem para o método segue a seguinte equação:

$$y_{i+1} = y_i + (a_1k_1 + a_2k_2)h$$

$$k_2 = f(x_i + p_1h, q_1k_1h)$$

Os valores  $a_1, a_2$  e  $q_1$  são calculados igualando-se a primeira equação à expansão em série de Taylor até os termos de 2º grau. Fazendo isso, deduzimos três equações para calcular as quatro constantes desconhecidas. As três equações são:

$$a_1 + a_2 = 1 \quad a_1 + p_1 = \frac{1}{2} \quad a_2q_1 = \frac{1}{2}$$

Logo: substituindo  $a_1$  e  $a_2$

$$y_{i+1} = y_i + k_2h$$

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

Para encontrarmos  $k_2$  temos que resolver as equações que ficara: substituindo  $a_2(a_2 = 1)$

$$a_2p_1 = \frac{1}{2}; p_1 = \frac{1}{2}; q_1 = \frac{1}{2}$$

Agora temos:

$$k_2 = f(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1h)$$

Se fizermos agora  $a_1 = \frac{1}{2}$ , podemos calcular que  $a_2 = \frac{1}{2}$ , nos dará a seguinte equação para o cálculo do próximo valor de  $y$ :

$$y_{i+1} = y_i + (\frac{1}{2}k_1 + \frac{1}{2}k_2)h$$

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$a_1 p_1 = \frac{1}{2}$ , então,  $p_1 = 1$  e  $a_2 q_1 = \frac{1}{2}$ , implica que  $q_1 = 1$

$$k_2 = f(x_i + h, y_i + q_1 k_1 h)$$

O método de ordem 3, é semelhante ao anterior:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3)h$$

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1 h)$$

$$k_3 = f(x_i + h, y_i - k_1 h + 2k_2 h)$$

O método de ordem 4 são os mais precisos:

$$k_1 = f(x_i, y_i), k_2 = f(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1 h)$$

$$k_3 = f(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_2 h)$$

$$k_4 = f(x_i + h, y_i + k_3 h)$$

$$k = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

## 7.1 APLICAÇÃO DO MÉTODO DE RUNGE-KUTTA

Em análise numérica, os métodos de Runge–Kutta formam uma família importante de métodos iterativos implícitos e explícitos para a resolução numérica (aproximação) de soluções de equações diferenciais ordinárias.

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y)$$

A expressão acima toma essa forma:

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_i^s b_i k_i$$

$$k_i = f(t_n + c_i h, y_n + h \sum_j^s a_{ij} k_j)$$

Como demonstrado acima, podemos utilizar o fator de ordem 4 para solucionar equações diferenciais. Abaixo, temos uma solução numérica de uma EDO:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[k_1 + k_2], n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$k_1 = f(x_n, y_n),$$

$$K_2 = f(x_n + h, y_n + hK_1),$$

Resolver:

$$y' = -y + x + 2$$

$$y(0) = 2, x \in [0, 0, 3], h = 0, 1$$

Solução:

$$y(x) = e^x + x + 1$$

Temos que encontrar  $y_n$ , com  $n = 1, 2, 3$ , onde  $x_1 = 0, 1$ ,  $x_2 = 0, 2$  e  $x_3 = 0, 3$  então para  $n = 0$

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{2}[K_1 + K_2]$$

$$k_1 = f(x_0; y_0) = f(0, 2) = -2 + 0 + 2 = 0, 0000$$

$$k_2 = f(x_0 + h; y_0 + hk_1) = f(0, 1; 0, 2) = -2 + 0, 1 + 2 = 0, 1000$$

$$\rightarrow y_1 = 2 + \frac{0, 1}{2}[0, 0000 + 0, 1000] = 2, 005000$$

Para  $n = 1$

$$y_2 = y_1 + \frac{h}{2}[k_1 + k_2]$$

$$k_1 = f(x_1; y_1) = f(0, 1; 2, 005000) = -2, 00500 + 0, 1 + 2 = 0, 09500$$

$$k_2 = f(x_1 + h; y_1 + hk_1) = f(0, 2; 2, 014500) = -2, 014500$$

$$+ 0, 2 = 0, 185500 \rightarrow y_2 = 2, 00500 + \frac{0, 1}{2}[0, 095000 + 0, 1855000] =$$

$$= 2, 019025$$

Para  $n = 2$

$$y_3 = y_2 + [k_1 + k_2]$$

$$k_1 = f(x_2; y_2) = f(0, 2; 2, 019025) = -2, 019025 + 0, 2 + 2 = 0, 180975$$

$$k_2 = f(x_2 + h; y_2 + hk_1) = f(0, 3; 2, 0371223) = -2, 037123 + 0, 3 + 2 = 0, 262877$$

$$\rightarrow y_3 = 2, 019025 + \frac{0, 1}{2}[0, 180975 + 0, 262877] =$$

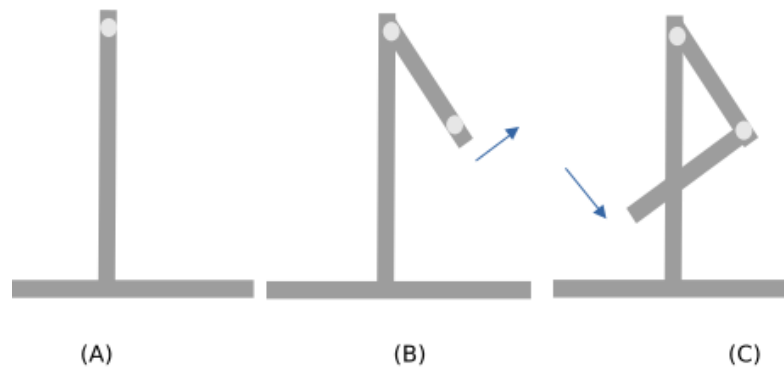
$$= 2, 041218$$

Essa é uma das aplicações do método de Runge-Kutta, acima foi dada uma demonstração de uma solução numérica para uma equação diferencial de primeira ordem utilizando o método de 2<sup>a</sup> e 4<sup>a</sup> ordem.

## 8 METODOLOGIA

Para que fosse possível verificar os dois formalismos, newtoniano e lagrangiano, foi construído um conjunto de pêndulos, simples e duplo para a observação desses modelos matemáticos. Para a construção dos pêndulos foram utilizadas matérias acessíveis como hastes de alumínio, parafusos e dobradiças, e com um custo razoável.

Figura 4: Modelo experimental do pêndulo simples e duplo



Fonte: Elaborada pelo autor (2024)

A figura acima representa o modelo didático dos pêndulos, o modelo **(A)** é a base de sustentação, o segundo **(B)**, é uma haste que se desloca da base. Pode-se observar o aparecimento do pêndulo simples. Na terceira ilustração **(C)**, outra haste se desloca da primeira, transformando-se no pêndulo duplo.

## REFERÊNCIAS

- ANDRADE, M. D.; FILHO, L. F. Uma abordagem geométrica ao problema da braquistócrona. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, SciELO Brasil, v. 37, p. 2309–1, 2015.
- BROOKS, M. **Grandes cuestiones. Física**. [S.l.]: Grupo Planeta (GBS), 2011.
- CARDOSO, W. B.; ARAÚJO, F. d. P. S. de; TRINDADE, A. K. B. da. O formalismo de hamilton-lagrange. **CQD-Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, 2020.
- CARTWRIGHT, J. H.; PIRO, O. **The dynamics of Runge–Kutta methods**. [S.l.]: World Scientific, 1992. v. 2. 427–449 p.
- LEMO, N. A. **Mecânica analítica**. [S.l.]: Editora Livraria da Física, 2007.
- NETO, J. B. **Mecânica Newtoniana, Lagrangiana e Hamiltoniana**. [S.l.]: Editora Livraria da Física, 2004.
- TAYLOR, J. R. **Mecânica clássica**. [S.l.]: Bookman Editora, 2013.
- THORNTON, S. T.; MARION, J. B. **Dinâmica clássica de partículas e sistemas**. [S.l.]: Cengage Learning, 2011.



## 9 CONCLUSÃO

A pesquisa abordada, neste trabalho, consistiu no desenvolvimento de um experimento para analisar os formalismos newtoniano e lagrangiano, aplicados por meio de dois pêndulos, simples e duplos. O formalismo newtoniano e o lagrangeano foram demonstrados matematicamente e observados nos dois casos (pêndulo simples e duplo), para o pêndulo simples, ambos os formalismos chegaram no mesmo resultado, não existindo nenhuma discrepância em termos de complexidade matemática, pois, é possível trabalhar com o formalismo newtoniano, bem como, com o lagrangiano. Porém, quando partimos para o pêndulo composto (duplo), existe uma desvantagem ao empregar o método newtoniano, pois mesmo com a capacidade de descrever o sistema, existe algumas restrições, por se tratar de um sistema não-linear e caótico, contudo, o método torna-se muito complexo de ser aplicado, pois a forma vetorial de Newton torna a observação mais detalhada quanto à força que está atuando no sistema, porém, gera muita informação do ponto de vista matemático.

A mecânica newtoniana nos oferece uma descrição acurada do problema, em termos de espaço e movimento. Fica evidente que o formalismo de Lagrange é mais eficaz a respeito desse tipo de sistema físico, o método de lagrange é mais vantajoso. Contudo, mesmo sendo útil, o método requer um cuidado matemático. Cada problema recebeu uma abordagem nova ou uma interpretação diferente, as duas ferramentas enriqueceu, ainda, mais o experimento. Sendo o objetivo deste trabalho, obter diferentes pontos de vista com respeito a mecânica newtoniana e lagrangiana aplicada a determinados sistemas físicos.