



INSTITUTO FEDERAL DO SERTÃO PERNAMBUCANO
CAMPUS SERRA TALHADA
CURSO DE LICENCIATURA EM FÍSICA

Isaías José de Lima

Um estudo do espalhamento Bhabha

Serra Talhada - PE

2024

Isaías José de Lima

Um estudo do espalhamento Bhabha

Trabalho de Conclusão de Curso de Licenciatura em Física do Instituto Federal do Sertão Pernambucano campus Serra Talhada como requisito para a obtenção do título de Licenciado em Física.
Orientador: Prof. Alessio Tony Batista Celeste

Serra Talhada - PE

2024

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

L732 Lima, Isaías José de.

Um estudo do espalhamento Bhabha / Isaías José de Lima. - Serra Talhada, 2024. 37 f.

Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Física) -Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Sertão Pernambucano, Campus Serra Talhada, 2024.
Orientação: Prof. Dr. Profº Alessio Tony Batista Celeste.

1. Física. 2. teoria de campos. 3. eletrodinâmica quântica. 4. espalhamento Bhabha. 5. regras de Feynman. I. Título.

CDD 530

Isaías José de Lima

Um estudo do espalhamento Bhabha

Este Trabalho de Conclusão de Curso foi julgado adequado para obtenção do Título de “Licenciado em Física” e aprovado em sua forma final pelo Curso de Graduação em Licenciatura em Física.

Serra Talhada - PE, 05 de setembro de 2024.

Banca Examinadora:

Documento assinado digitalmente
 **ALESSIO TONY BATISTA CELESTE**
Data: 22/11/2024 18:44:17-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Alessio Tony Batista Celeste
Instituto Federal do Sertão Pernambucano

Documento assinado digitalmente
 **EDUARDO MARCOS RODRIGUES DOS PASSOS**
Data: 26/11/2024 16:48:18-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Eduardo Marcos Rodrigues dos Passos
Universidade Federal de Campina Grande

Documento assinado digitalmente
 **DANIEL DE SOUZA SANTOS**
Data: 25/11/2024 12:11:09-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Daniel de Souza Santos
Instituto Federal do Sertão Pernambucano

Documento assinado digitalmente
 **ALEX DE SOUZA MAGALHAES**
Data: 22/11/2024 18:49:25-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Alex Souza Magalhães
Instituto Federal do Sertão Pernambucano

DEDICATÓRIA

Com muito amor e gratidão, dedico este trabalho aos meus pais, Maria Luciene e Francisco de Assis. Vocês foram minha fonte inesgotável de inspiração e força ao longo desta jornada acadêmica. Agradeço profundamente pelo apoio incondicional, pelos valores e ensinamentos que me transmitiram, e por acreditarem em mim em cada passo do caminho. Este trabalho é uma pequena homenagem ao amor, à dedicação e ao sacrifício de vocês.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, por me guiar e dar forças para superar todos os desafios ao longo desta jornada acadêmica.

Ao Instituto Federal, especialmente ao campus Serra Talhada, por proporcionar um ambiente de aprendizado e crescimento. Agradeço a todos os professores que contribuíram para minha formação, em especial ao meu orientador, Prof. Aléssio Tony, pela orientação, paciência e dedicação.

Aos meus pais, Maria Luciene e Francisco de Assis, por todo o amor, apoio e incentivo. Vocês são a minha base e inspiração.

Aos meus amigos, pela companhia, apoio e momentos de descontração que tornaram essa trajetória mais leve e prazerosa.

A todos vocês, meu sincero e profundo agradecimento.

"A busca pelo conhecimento é o que dá sentido à vida."

Carl Sagan

RESUMO

O presente trabalho teve como objetivo investigar a teoria de campos, focando na descrição das interações entre partículas subatômicas através da eletrodinâmica quântica (QED). A justificativa reside na importância fundamental dessa teoria para o entendimento das forças fundamentais e na precisão de suas previsões experimentais. Iniciamos revisitando as contribuições históricas de Faraday, Maxwell, e Einstein, culminando na teoria quântica de campos. Analisamos detalhadamente o processo de espalhamento Bhabha, que envolve a interação entre elétrons e pósitrons, empregando as regras de Feynman para calcular a amplitude de espalhamento e a seção de choque. Os resultados confirmaram a consistência teórica e a acurácia da QED em prever fenômenos experimentais, consolidando sua relevância no Modelo Padrão da física de partículas.

Palavras-chave: teoria de campos; eletrodinâmica quântica; espalhamento Bhabha; regras de Feynman.

ABSTRACT

This study aimed to investigate field theory, focusing on the description of interactions between subatomic particles through quantum electrodynamics (QED). The justification lies in the fundamental importance of this theory for understanding fundamental forces and the accuracy of its experimental predictions. We began by revisiting the historical contributions of Faraday, Maxwell, and Einstein, culminating in quantum field theory. We analyzed in detail the Bhabha scattering process, which involves the interaction between electrons and positrons, employing Feynman's rules to calculate the scattering amplitude and cross-section. The results confirmed the theoretical consistency and accuracy of QED in predicting experimental phenomena, solidifying its relevance in the Standard Model of particle physics.

Keywords: Field theory; quantum electrodynamics; Bhabha scattering; Feynman rules.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	10
2	A ESTRUTURA LAGRANGIANA NA TEORIA QUÂNTICA DE CAMPOS	12
3	AS EQUAÇÕES DE KLEIN-GORDON E DIRAC	13
4	ELETRODINÂMICA QUÂNTICA	17
5	SEÇÃO DE CHOQUE E REGRAS DE FEYNMAN	20
6	ESPALHAMENTO BHABHA	23
7	CONCLUSÃO	29
	REFERÊNCIAS.....	30
	APÊNDICE A- CONCEITOS GERAIS BÁSICOS USADOS NESSE TRABALHO.....	32
	ANEXO A- CÓDIGO FONTE DO MATHEMATICA PARA O ESPALHAMENTO BHABHA	34

1 INTRODUÇÃO

A teoria de campos, que descreve como os campos físicos interagem com a matéria, tem raízes profundas no século XIX, com o trabalho pioneiro de Michael Faraday e James Clerk Maxwell. Faraday introduziu a ideia de linhas de força para descrever campos elétricos e magnéticos, conceitos que Maxwell formalizou nas suas famosas equações. Essas equações unificaram as teorias da eletricidade e do magnetismo, formando a base para a eletrodinâmica clássica.

No início do século XX, Albert Einstein revolucionou a física ao introduzir a teoria da relatividade especial, que reformulou as leis do eletromagnetismo de Maxwell para serem compatíveis com a velocidade constante da luz e a equivalência entre massa e energia. Simultaneamente, a mecânica quântica emergiu com contribuições de cientistas como Max Planck, Niels Bohr, Werner Heisenberg e Erwin Schrödinger. A combinação da mecânica quântica com a teoria da relatividade especial levou ao desenvolvimento da Teoria Quântica de Campos (TQC), que descreve as interações entre partículas subatômicas (PESKIN, 1995; RYDER, 1985; MANDL, 1984).

Uma das primeiras TQC bem-sucedidas foi a eletrodinâmica quântica (QED, do inglês Quantum Electrodynamics), que descreve a interação entre partículas carregadas e o campo eletromagnético (FEYNMAN, 1950). A história da QED começou com a formulação da equação de Dirac em 1927, que descrevia o comportamento dos elétrons relativísticos e previa a existência do pósitron. A descoberta do pósitron por Carl Anderson em 1932 confirmou a previsão de Dirac, estabelecendo um marco importante na física de partículas.

Durante a década de 1940, Richard Feynman, Julian Schwinger e Sin-Itiro Tomonaga desenvolveram métodos para lidar com as divergências infinitas nos cálculos de QED através da renormalização. Feynman introduziu os diagramas de Feynman, uma ferramenta visual poderosa que simplificava os cálculos das interações entre partículas, enquanto Schwinger e Tomonaga desenvolveram formulações matemáticas rigorosas da QED (SCHWINGER, 1948; TOMONAGA, 1946). Em 1965, Feynman, Schwinger e Tomonaga receberam o Prêmio Nobel de Física por seus trabalhos na QED.

A QED destacou-se pela precisão de suas previsões, como a medição do momento magnético anômalo do elétron e o desvio de Lamb, uma pequena diferença de energia entre dois níveis do átomo de hidrogênio. Essas verificações experimentais confirmaram a precisão da QED e solidificaram sua importância na física moderna. Além dessas realizações, a QED também forneceu a base teórica para entender diversos processos de interação de partículas.

Um desses processos importantes é o espalhamento de Bhabha, que ocorre no contexto da física de partículas (BHABHA, 1936). Esse processo específico envolve a interação entre um elétron e um pósitron, a antipartícula do elétron. Nomeado em homenagem ao físico indiano Homi J. Bhabha, que descreveu teoricamente o fenômeno em 1936, o espa-

lhamento de Bhabha ocorre quando um elétron e um pósitron se aproximam e interagem através da força eletromagnética, resultando na dispersão das duas partículas. Este processo é crucial para a compreensão das interações eletromagnéticas e das propriedades das partículas envolvidas, fornecendo informações valiosas que contribuíram significativamente para o desenvolvimento do Modelo Padrão da física de partículas (SALAM, 1961; GLASHOW, 1961; WEINBERG, 1967).

2 A ESTRUTURA LAGRANGIANA NA TEORIA QUÂNTICA DE CAMPOS

As teorias de campo podem ser definidas em termos de um hamiltoniano ou de um lagrangiano. Frequentemente, essas funções são expressas como integrais sobre todo o espaço das densidades hamiltonianas ou lagrangianas. Isso permite a formulação das equações de movimento e a descrição da dinâmica do sistema. A lagrangiana, por exemplo, pode ser escrita como:

$$L = \int d^3x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi_\alpha) \quad (1)$$

onde $\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi_\alpha)$ representa a densidade lagrangiana, ϕ são os campos e $\partial_\mu \phi$ são suas derivadas espaciais e temporais.

A TQC é o resultado da combinação da mecânica quântica com a relatividade especial. A relatividade especial é relevante quando as velocidades são uma fração razoável da velocidade da luz. Neste limite surge uma nova simetria: a invariância de Lorentz. Um sistema é invariante de Lorentz se for simétrico no grupo de Lorentz, que é a generalização do grupo de rotação para incluir rotações e *boosts* ("empurrões")¹.

Na TQC, usaremos quase exclusivamente lagrangianas. A razão principal para isso é que as lagrangianas são manifestamente invariantes de Lorentz. A dinâmica de um sistema Lagrangiano é determinada pelo princípio de mínima ação ou princípio de Hamilton. A ação é a integral ao longo do tempo da lagrangeana:

$$S = \int dt L = \int d^4x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi_\alpha). \quad (2)$$

De acordo com o princípio de mínima ação, as equações de movimento para os campos vêm da imposição de que estas equações correspondam às condições que extremizam S , ou seja, $\delta S = 0$. A lagrangiana deve satisfazer as equações de Euler-Lagrange, dada por

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta (\partial_\mu \phi_\alpha)} \right) - \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi_\alpha} = 0. \quad (3)$$

A quadri-derivada covariante com relação a x^μ da equação anterior é dada por

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right) = (c^{-1} \partial_t, \partial_x, \partial_y, \partial_z). \quad (4)$$

A quadri-derivada contra-covariante com relação é definida por

$$\partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, -\nabla \right) = (c^{-1} \partial_t, -\partial_x, -\partial_y, -\partial_z). \quad (5)$$

Em unidades naturais, isto é $\hbar = c = 1$, a ação é adimensional, tal que a densidade de lagrangiana tem dimensão inversa de d^4x , ou seja,

$$[\mathcal{L}] = L^{-4} = M^4. \quad (6)$$

¹ Transformações que envolvem mudanças em coordenadas espaciais e temporais.

3 AS EQUAÇÕES DE KLEIN-GORDON E DIRAC

Os caminhos para a mecânica quântica relativística começaram a partir da equação de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi\rangle = H |\psi\rangle, \quad (7)$$

que representa uma equação de autovalor da álgebra linear. Interpretamos os autovalores do operador hamiltoniano H como as energias permitidas do sistema. Da relatividade de Einstein a energia relativística para uma partícula de massa de repouso m é escrita como

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4. \quad (8)$$

Em unidades naturais $E^2 = p^2 + m^2$ e tem um valor positivo. A tarefa era encontrar um hamiltoniano que reproduzisse esse autovalor de energia. Reescrevendo a Eq. ((7)) em unidades naturais e em seguida tomando a derivada temporal mais uma vez, encontramos

$$-\frac{\partial^2}{\partial t^2} |\psi\rangle = i \frac{\partial}{\partial t} H |\psi\rangle = H^2 |\psi\rangle, \quad (9)$$

que pode ser escrito como

$$H^2 |\psi\rangle + \frac{\partial^2}{\partial t^2} |\psi\rangle = 0 \Rightarrow \left(H^2 + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) |\psi\rangle = 0. \quad (10)$$

Como o operador hamiltoniano representa a energia do sistema, e da mecânica quântica o momento é dado por $p = -i\hbar \nabla^2$, então, $H^2 = E^2 = p^2 + m^2 = -\nabla^2 + m^2$. Portanto,

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + m^2 \right) |\psi\rangle = 0. \quad (11)$$

Essa é uma equação de onda relativística conhecida como equação de Klein-Gordon (KG). Note que ela se assemelha muito a uma equação de onda clássica, exceto pelo termo m^2 . Utilizando a notação de derivada covariante, a Eq. (11) pode ser escrita da seguinte forma: $(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) |\psi\rangle = 0$. No entanto, a equação de KG apresenta dois problemas fundamentais: o primeiro é que a equação possui soluções de energia negativa; o segundo é que $|\psi|^2$ não pode ser interpretado como a densidade de probabilidade. Esses problemas foram resolvidos com a equação de Dirac, que discutiremos a seguir.

A equação de Dirac foi o ponto de partida para a Teoria Quântica de Campos que é a base para a Eletrodinâmica Quântica (QED, do inglês Quantum Electrodynamics). A QED é teoria "mais completa" da física e que iremos utilizar para realizar o cálculo da seção de choque no espalhamento Bhabha a partir das regras de Feynman.

Como mencionado anteriormente, a mecânica quântica é descrita pela equação de Schrödinger dependente do tempo, que pode ser expressa da seguinte forma:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial \psi(\vec{r}, t)}{\partial t} &= -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(\vec{r}, t) + V(\vec{r}) \psi(\vec{r}, t) \Rightarrow \\ i\hbar \frac{\partial \psi(\vec{r}, t)}{\partial t} &= H \psi(\vec{r}, t). \end{aligned} \quad (12)$$

Em 1928, para resolver os problemas apresentados pela equação de Klein-Gordon (KG), Paul A. M. Dirac propôs uma abordagem inovadora (DIRAC, 1928). Ele sugeriu que as derivadas temporais e espaciais deveriam ter a mesma ordem de grandeza no operador hamiltoniano, uma vez que, na teoria da relatividade, o tempo é tratado com a mesma importância que as variáveis espaciais. Com isso, Dirac introduziu o seguinte operador hamiltoniano:

$$H = c \vec{\alpha} \cdot \vec{p} + mc^2 \beta = -i\hbar c \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + mc^2 \beta. \quad (13)$$

Agora, elevando ao quadrado a Eq. (13) e depois atuando em ψ (pra simplificar façamos $c = 1$), teremos

$$\begin{aligned} H^2 \psi &= (\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + m\beta)(\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + m\beta)\psi = \left(\sum_i \alpha_i p_i + m\beta \right) \left(\sum_j \alpha_j p_j + m\beta \right) \psi \\ &= \left(\alpha_i^2 p_i^2 + (\alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i) p_i p_j + (\alpha_i \beta + \beta \alpha_i) p_i m + \beta^2 m^2 \right) \psi \\ &= (p^2 + m^2) \psi. \end{aligned} \quad (14)$$

Dessa forma, para que as equações sejam consistentes devemos ter as seguintes (dez) condições: $\alpha_i^2 = 1$, $(\alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i) = 0$, $(\alpha_i \beta + \beta \alpha_i) = 0$, $\beta^2 = 1$. Na mecânica quântica sabemos que o operador hamiltoniano é hermitiano, assim $\vec{\alpha}$ e β devem ser matrizes quadradas. A dimensão mais baixa das matrizes que satisfazem as condições anteriores é 4×4 . Essas matrizes podem ser representadas na forma¹.

$$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}. \quad (15)$$

As matrizes de Dirac são matrizes 4×4 que surgem na descrição da mecânica quântica relativística a partir da equação de Dirac, são elas

$$\gamma_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \quad (16)$$

onde σ_i são as matrizes de Pauli e I é a matriz identidade 2×2 .

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_0 = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (17)$$

As matrizes de Dirac satisfazem a álgebra não comutativa de Clifford:

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = \gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 2g_{\mu\nu}. \quad (18)$$

$g_{\mu\nu}$ representa a métrica do espaço-tempo. No espaço-tempo de Minkowski (notação do JACKSON, 1975), temos

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (19)$$

¹ Representação de Dirac.

Temos ainda as seguintes propriedades das matrizes de Dirac

$$(\gamma_0)^\dagger = \gamma_0, \quad (20)$$

$$(\gamma_i)^\dagger = -\gamma_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (21)$$

Substituindo a Eq. ((13)) na Eq. ((12)) obtemos (em unidades naturais)

$$\begin{aligned} i\frac{\partial\psi}{\partial t} &= -i\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla}\psi + m\beta\psi \Rightarrow iI\frac{\partial\psi}{\partial t} + i\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla}\psi - m\beta\psi = 0 \Rightarrow \\ i\left(\alpha_0\frac{\partial\psi}{\partial t} + \alpha_1\frac{\partial\psi}{\partial x_1} + \alpha_2\frac{\partial\psi}{\partial x_2} + \alpha_3\frac{\partial\psi}{\partial x_3}\right) - m\beta\psi &= 0 \Rightarrow \\ i\gamma_\mu\frac{\partial\psi}{\partial x^\mu} - m\beta\psi &= 0, \end{aligned} \quad (22)$$

do último resultado chegamos a forma compacta da equação de Dirac (para muitos a equação matemática mais bela de todas!) é escrita como

$$(i\rlap{-}/\partial - m)\psi = 0. \quad (23)$$

onde ψ é o spinor de Dirac de quatro componentes, $\rlap{-}/\partial = \gamma_\mu\partial^\mu$ e γ^μ são as matrizes de Dirac.

Buscamos encontrar agora a natureza das soluções da Eq. (23). Se consideramos partículas livres em repouso, isto é com $\vec{p} = \vec{0}$, a equação de Dirac se torna simplesmente,

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\vec{x}, t) = \beta mc^2\psi(\vec{x}, t). \quad (24)$$

Dada a forma diagonal da matriz β , notamos que existe quatro equações independentes para ψ ,

$$\begin{aligned} i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} &= mc^2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ \begin{cases} i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi_1 = mc^2\psi_1 \\ i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi_2 = mc^2\psi_2 \\ i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi_3 = -mc^2\psi_3 \\ i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi_4 = -mc^2\psi_4 \end{cases} \end{aligned} \quad (25)$$

A quatro equações acima geram quatro soluções independentes, as duas primeiras com energia positiva (partícula com spin para cima e para baixo) e as duas últimas com energias

negativas (anti-partículas com spin para cima e para baixo), são elas²:

$$\psi_1 = e^{-i\frac{mc^2}{\hbar}t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \psi_2 = e^{-i\frac{mc^2}{\hbar}t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (26)$$

$$\psi_3 = e^{+i\frac{mc^2}{\hbar}t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \psi_4 = e^{+i\frac{mc^2}{\hbar}t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (27)$$

podemos ainda representar os resultados anteriores em termos da base

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \chi = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (28)$$

ficamos com

$$\psi_1 = e^{-i\frac{mc^2}{\hbar}t} \begin{pmatrix} \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \psi_2 = e^{-i\frac{mc^2}{\hbar}t} \begin{pmatrix} \chi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (29)$$

$$\psi_3 = e^{+i\frac{mc^2}{\hbar}t} \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi \end{pmatrix}, \quad \psi_4 = e^{+i\frac{mc^2}{\hbar}t} \begin{pmatrix} 0 \\ \chi \end{pmatrix}. \quad (30)$$

² No espaço das posições. Essas soluções são conhecidas como spiniores de Dirac.

4 ELETRODINÂMICA QUÂNTICA

A lagrangiana que descreve a eletrodinâmica quântica (QED) é dada pela soma da lagrangiana de Maxwell e da lagrangiana de Dirac, ou seja,

$$\mathcal{L}_{QED} = \mathcal{L}_{Maxwell} + \mathcal{L}_{Dirac}, \quad (31)$$

onde a lagrangiana que descreve o eletromagnetismo de Maxwell é dada por

$$\mathcal{L}_{Maxwell} = -\frac{1}{4\mu_0} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad (32)$$

em que $F^{\mu\nu}$ é o tensor do campo eletromagnético definido por

$$F^{\mu\nu} \equiv \frac{\partial A^\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A^\mu}{\partial x_\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu, \quad (33)$$

com o quadri-potencial dado por $A^\mu = (\phi/c, \vec{A}) = (\phi/c, A_x, A_y, A_z)$, com ϕ sendo o potencial escalar do campo elétrico (potencial coulombiano) e \vec{A} o potencial vetor do campo magnético. Do eletromagnetismo o campo elétrico é escrito como $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \partial_t \vec{A}$ e o campo magnético $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$. Para verificar que essas duas últimas expressões é equivalente à Eq. ((33)), façamos

$$F^{01} = \frac{\partial A^1}{\partial x_0} - \frac{\partial A^0}{\partial x_1} = -\frac{\partial A_x}{\partial(ct)} - \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{1}{c} \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{\nabla} \phi \right)_x = \frac{E_x}{c}. \quad (34)$$

$$F^{12} = \frac{\partial A^2}{\partial x_1} - \frac{\partial A^1}{\partial x_2} = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{1}{c} \frac{\partial A_x}{\partial y} = (\vec{\nabla} \times \vec{A})_z = B_z. \quad (35)$$

O tensor do campo eletromagnético pode ser representado na forma matricial

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} F^{00} & F^{01} & F^{02} & F^{03} \\ F^{10} & F^{11} & F^{12} & F^{13} \\ F^{20} & F^{21} & F^{22} & F^{23} \\ F^{30} & F^{31} & F^{32} & F^{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c \\ -E_x/c & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y/c & -B_z & 1 & B_x \\ -E_z/c & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (36)$$

Observe que os elementos construídos nas Eqs. (34) e (35) estão presentes nessa matriz.

A lagrangiana de Maxwell Eq. (32) é invariante de gauge, ou seja, ela toma a mesma forma sob a transformação no 4-potencial

$$A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) + \partial_\mu \alpha(x), \quad (37)$$

para alguma função $\alpha(x)$. As equações de Maxwell seguem das equações de Euler-Lagrange, fazendo as correspondências

$$q \rightarrow A_\mu, \quad t \rightarrow x^\mu = (ct, \vec{x}), \quad \dot{q} \rightarrow \partial_\mu A_\nu, \quad (38)$$

temos

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} \right) - \frac{\mathcal{L}}{\partial A_\nu} = 0, \quad (39)$$

que resulta em

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 J^\nu. \quad (40)$$

onde $J^\nu = (c\rho, \vec{j})$ é a densidade de corrente.

A lagrangiana de Dirac em ((31)) possui a seguinte forma

$$\mathcal{L}_{Dirac} = \bar{\psi}(i\rlap{\not{D}} - m)\psi, \quad (41)$$

onde $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma_0$ é o spinor adjunto, com ψ^\dagger representando o transposto conjugado complexo, $\rlap{\not{D}} = \gamma^\mu \partial_\mu$ e γ_0 é uma das matrizes de Dirac.

A partir de (41) e da equação de Euler-Lagrange chega-se a equação de Dirac:

$$(i\rlap{\not{D}} - m)\psi = 0. \quad (42)$$

A lagrangiana (41) é invariante sob uma transformação de fase global $U(1)$, tal que

$$\psi(\vec{x}, t) \rightarrow e^{i\alpha} \psi(\vec{x}, t), \quad (43)$$

onde neste caso α é um fator de fase constante. Pelo teorema de Noether temos uma corrente conservada associada a essa simetria. Para obtermos essa corrente, vamos escrever a equação de Dirac para o campo $\bar{\psi}$:

$$(i\rlap{\not{D}} + m)\bar{\psi} = 0. \quad (44)$$

Multiplicando (42) à esquerda por $\bar{\psi}$ e (44) à direita por ψ e subtraindo o resultado de (44) e (23), chega-se ao seguinte resultado

$$\partial_\mu j^\mu(\vec{x}, t) = 0, \quad (45)$$

onde $j^\mu(\vec{x}, t) = \bar{\psi}(\vec{x}, t)\gamma^\mu\psi(\vec{x}, t)$ é a corrente de Dirac.

No entanto a lagrangiana de Dirac (41), devido aos termos que envolvem as derivadas, não é invariante perante as transformações de fase local $\psi \rightarrow e^{i\alpha(x)}\psi$ e se modifica como

$$\mathcal{L}_{Dirac} \rightarrow \mathcal{L}_{Dirac} - \bar{\psi}\gamma^\mu\psi\partial_\mu\alpha. \quad (46)$$

A invariância sob transformações de gauge locais¹ é de extrema importância no que diz respeito as interações fundamentais.

¹ A interpretação atual de tal conceito foi dada por Fock em 1926.

Para que (41) seja invariante sob transformações locais de fase, escrevemos

$$\mathcal{L}_{mat} = i\bar{\psi}(\not{D} - m)\psi = \mathcal{L}_{Dirac} + \mathcal{L}_{int}, \quad (47)$$

onde $\mathcal{L}_{int} = e\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu\psi$ é o termo de interação entre o lépton e o fóton. Dessa forma, reescrevemos a lagrangiana da QED como segue

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{QED} &= \mathcal{L}_{Maxwell} + \mathcal{L}_{mat} \Rightarrow \\ \mathcal{L}_{QED} &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\not{D} - m - e\not{A})\psi, \end{aligned} \quad (48)$$

que é invariante sob as transformações de gauge locais, dadas por

$$\psi(\vec{x}, t) \rightarrow e^{i\alpha(x)}\psi(\vec{x}, t), \quad (49)$$

$$\bar{\psi}(\vec{x}, t) \rightarrow e^{-i\alpha(x)}\bar{\psi}(\vec{x}, t), \quad (50)$$

$$A_\mu(\vec{x}, t) \rightarrow A_\mu(\vec{x}, t) - \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha(\vec{x}, t). \quad (51)$$

Neste caso diz-se que a teoria detém uma simetria de gauge abeliana $U(1)$. A lagrangiana em (48) está por trás de quase todos os fenômenos observados desde escalas macroscópicas até 10^{-13} cm.

5 SEÇÃO DE CHOQUE E REGRAS DE FEYNMAN

De forma esquemática um processo de espalhamento de partículas é composto pelos seguintes elementos:

$$\textit{Partículas Iniciais} \rightarrow \textit{Interação} \rightarrow \textit{Partículas Finais}$$

Para calcular a probabilidade de um processo de espalhamento relativístico ocorrer, precisamos determinar a amplitude de espalhamento \mathcal{M} que conecta um estado inicial caracterizado por um conjunto de partículas que possuem momentos bem definidos, a um estado final contendo outras partículas que também possuem momentos bem definidos.

Uma vez determinada a amplitude de espalhamento é possível calcular grandezas físicas mensuráveis, uma das mais importantes é a seção de choque diferencial já que é dada por¹:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{CM}} = \frac{1}{64\pi^2 E_{\text{CM}}^2} |\mathcal{M}|^2, \quad (52)$$

onde E_{CM} representa a energia do centro de massa. A unidade para a seção de choque usada na física de partículas é chamada de *barn*, onde $1 \text{ barn} = 10^{-28} \text{ m}^2$.

Richard P. Feynman introduziu um método visual revolucionário, utilizando diagramas que simplificam cálculos complexos e aparentemente impossíveis, necessários para descrever as interações fundamentais entre partículas. Esses diagramas, conhecidos como Diagramas de Feynman, permitem, por meio de um conjunto de regras básicas, calcular a amplitude de espalhamento de partículas de forma mais intuitiva e eficiente.

Ao trabalharmos com elétrons e pósitrons de momento $p = (E, \vec{p})$ e energia $E = \sqrt{p^2 + m^2}$ eles serão representados pelas funções de onda:²

$$\begin{aligned} \psi(x) &= u^{(s)}(p)e^{-ip \cdot x} \\ \psi(x) &= v^{(s)}(p)e^{ip \cdot x}, \end{aligned} \quad (53)$$

com $s = 1, 2$ indicando os spins dessas partículas. Para o fóton (partícula sem massa) com momento $p = (E, \vec{p})$ e energia $E = |\vec{p}|$ temos a representação

$$A_\mu(x) = e^{-ip \cdot x} \epsilon_\mu^{(s)}, \quad (54)$$

onde $\epsilon_\mu^{(s)}$ são vetores de polarizações que satisfazem $p^\mu \epsilon_\mu = 0$, $s = 1, 2$ indica os estados de polarizações.

¹ Essa equação é utilizada quando as partículas possuem massas iguais.

² Por simplicidade, omitimos o fator de normalização.

Os espinores u e v em (53), assim como os adjuntos $\bar{u} = u^\dagger \gamma^0$ e $\bar{v} = v^\dagger \gamma^0$, satisfazem à equação de Dirac no espaço dos momentos

$$(\gamma^\mu p_\mu - m)u = 0, \tag{55}$$

$$(\gamma^\mu p_\mu + m)v = 0, \tag{56}$$

$$\bar{u}(\gamma^\mu p_\mu - m) = 0, \tag{57}$$

$$\bar{v}(\gamma^\mu p_\mu + m) = 0. \tag{58}$$

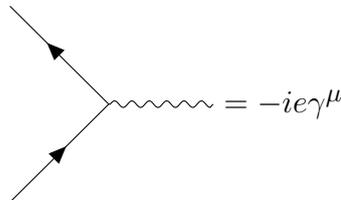
e obedecem as relações de completeza

$$\sum_{s=1,2} \bar{u}^{(s)} u^{(s)} = \gamma^\mu p_\mu + m, \tag{59}$$

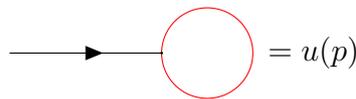
$$\sum_{s=1,2} \bar{v}^{(s)} v^{(s)} = \gamma^\mu p_\mu - m. \tag{60}$$

As principais regras idealizadas por Feynman para descrever processos de decaimentos e interações entre partículas são descritas a seguir.

1. A evolução temporal do diagrama é da esquerda para a direita.
2. Associaremos um momento p_i a cada perna externa do diagrama e um momento q_j a cada linha interna do diagrama.
3. Para cada vértice devemos associar um índice vetorial μ e multiplicar a expressão por um fator $-ie\gamma^\mu$.



4. Atribuir o espinor u para um elétron entrando no vértice do diagrama.³

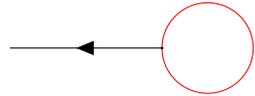


5. Atribuir o espinor \bar{u} para um elétron saindo no vértice do diagrama.



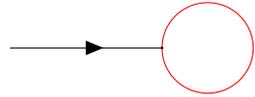
6. Atribuir o espinor \bar{v} para um pósitron entrando no vértice do diagrama.

³ O diagrama está representado pelo círculo em vermelho.



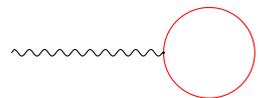
$$= \bar{v}(p)$$

7. Atribuir o espinor v para um pósitron saindo no vértice do diagrama.



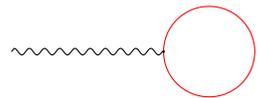
$$= v(p)$$

8. Atribuir ϵ_μ para um fóton entrando no vértice do diagrama.



$$= \epsilon_\mu(p)$$

9. Atribuir ϵ_μ^* para um fóton entrando no vértice do diagrama.



$$= \epsilon_\mu^*(p)$$

10. Uma linha interna contínua com uma seta na direção do fluxo do tempo corresponde ao propagador de um elétron.



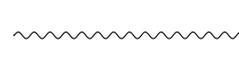
$$= \frac{i(\not{q}+m)}{q^2-m^2}$$

11. Uma linha interna contínua com uma seta na direção oposta do fluxo do tempo corresponde ao propagador de um pósitron.



$$= \frac{i(\not{q}+m)}{q^2-m^2}$$

12. Uma linha interna ondulada corresponde ao propagador de um fóton.



$$= \frac{-ig^{\mu\nu}}{q^2}$$

6 ESPALHAMENTO BHABHA

O espalhamento Bhabha foi calculado pela primeira vez pelo físico indiano Homi Jehangir Bhabha em 1936. Como o pósitron só foi descoberto em 1932, levou algum tempo para que a seção de choque prevista por Bhabha pudesse ser medida experimentalmente em laboratório.

$$e^+ + e^- \longrightarrow e^+ + e^- \quad (61)$$

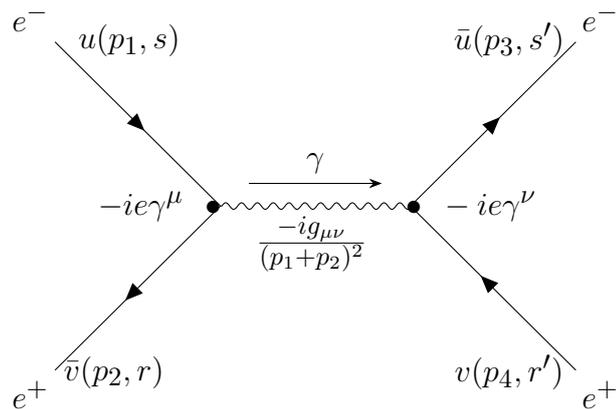


Figura 1: Canal-s do espalhamento Bhabha ($e^+ + e^- \rightarrow e^+ + e^-$).

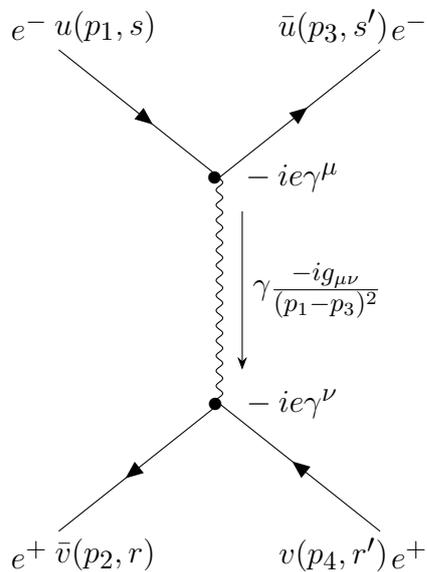


Figura 2: Canal-t do espalhamento Bhabha ($e^+ + e^- \rightarrow e^+ + e^-$).

A partir dos dois Diagramas de Feynman, podemos escrever o elemento de matriz para a amplitude de espalhamento da seção de choque. Esse elemento é obtido a partir da contribuição de ambos os canais, ou seja,

$$i\mathcal{M} = i\mathcal{M}_s + i\mathcal{M}_t. \quad (62)$$

$$\begin{aligned}
|\mathcal{M}|^2 &= (\mathcal{M}_s + \mathcal{M}_t)(\mathcal{M}_s^\dagger + \mathcal{M}_t^\dagger) = \mathcal{M}_s\mathcal{M}_s^\dagger + \mathcal{M}_s\mathcal{M}_t^\dagger + \mathcal{M}_t\mathcal{M}_s^\dagger + \mathcal{M}_t\mathcal{M}_t^\dagger \\
&= |\mathcal{M}_s|^2 + \mathcal{M}_s\mathcal{M}_t^\dagger + \mathcal{M}_t\mathcal{M}_s^\dagger + |\mathcal{M}_t|^2.
\end{aligned} \tag{63}$$

Definição das variáveis de Mandelstam

$$s = (p_1 + p_2)^2 = (p_3 + p_4)^2 \tag{64}$$

$$t = (p_1 - p_3)^2 = (p_2 - p_4)^2 \tag{65}$$

$$u = (p_1 - p_4)^2 = (p_2 - p_3)^2 \tag{66}$$

Aplicando as regras de Feynmann na primeira contribuição, teremos

$$\begin{aligned}
i\mathcal{M}_s &= \bar{v}(p_2, r)(-ie\gamma_\mu)u(p_1, s) \left[\frac{-ig^{\mu\nu}}{(p_1 + p_2)^2} \right] \bar{u}(p_3, s')(-ie\gamma_\nu)v(p_4, r') \\
i\mathcal{M}_s &= i\frac{e^2}{s}\bar{v}(p_2, r)\gamma_\mu u(p_1, s)\bar{u}(p_3, s')\gamma^\mu v(p_4, r') \\
\mathcal{M}_s &= \frac{e^2}{s} \left[\bar{v}(p_2)\gamma_\mu u(p_1) \right] \left[\bar{u}(p_3)\gamma^\mu v(p_4) \right].
\end{aligned} \tag{67}$$

Sabendo que, ver (PESKIN, 1995, pág. 132)

$$\left[\bar{v}(p_i)\gamma_\nu u(p_j) \right]^* = \bar{u}(p_j)\gamma_\nu v(p_i). \tag{68}$$

$$\left[\bar{u}(p_i)\gamma^\nu v(p_j) \right]^* = \bar{v}(p_j)\gamma^\nu u(p_i). \tag{69}$$

Então,

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_s^\dagger &= \frac{e^2}{s} \left[\bar{v}(p_2)\gamma_\nu u(p_1) \right]^\dagger \left[\bar{u}(p_3)\gamma^\nu v(p_4) \right]^\dagger \\
&= \frac{e^2}{s} \left[\bar{u}(p_1)\gamma_\nu v(p_2) \right] \left[\bar{v}(p_4)\gamma^\nu u(p_3) \right].
\end{aligned} \tag{70}$$

Cálculo da amplitude de espalhamento para o canal s,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4} \sum_{spins} |\mathcal{M}_s|^2 &= \frac{1}{4} \sum_{spins} \mathcal{M}_s \mathcal{M}_s^\dagger = \\
&= \frac{e^4}{4s^2} \sum_{spins} \left[\bar{v}(p_2) \gamma_\mu u(p_1) \bar{u}(p_3) \gamma^\mu v(p_4) \right] \left[\bar{u}(p_1) \gamma_\nu v(p_2) \bar{v}(p_4) \gamma^\nu u(p_3) \right] \\
&= \frac{e^4}{4s^2} \sum_{spins} \bar{v}_a(p_2) (\gamma_\mu)_{ab} u_b(p_1) \bar{u}_c(p_3) (\gamma^\mu)_{cd} v_d(p_4) \times \\
&\quad \times \bar{u}_e(p_1) (\gamma_\nu)_{ef} v_f(p_2) \bar{v}_g(p_4) (\gamma^\nu)_{gh} u_h(p_3) \\
&= (-1)^5 \frac{e^4}{4s^2} \sum_{spins} v_f(p_2) \bar{v}_a(p_2) (\gamma_\mu)_{ab} u_b(p_1) \bar{u}_c(p_3) (\gamma^\mu)_{cd} v_d(p_4) \times \\
&\quad \times \bar{u}_e(p_1) (\gamma_\nu)_{ef} \bar{v}_g(p_4) (\gamma^\nu)_{gh} u_h(p_3) \\
&= (-1)^{5+2} \frac{e^4}{4s^2} \sum_{spins} v_f(p_2) \bar{v}_a(p_2) (\gamma_\mu)_{ab} u_b(p_1) \bar{u}_e(p_1) (\gamma_\nu)_{ef} \times \\
&\quad \times \bar{u}_c(p_3) (\gamma^\mu)_{cd} v_d(p_4) \bar{v}_g(p_4) (\gamma^\nu)_{gh} u_h(p_3) \\
&= (-1)^{7+3} \frac{e^4}{4s^2} \sum_{spins} v_f(p_2) \bar{v}_a(p_2) (\gamma_\mu)_{ab} u_b(p_1) \bar{u}_e(p_1) (\gamma_\nu)_{ef} \times \\
&\quad \times u_h(p_3) \bar{u}_c(p_3) (\gamma^\mu)_{cd} v_d(p_4) \bar{v}_g(p_4) (\gamma^\nu)_{gh} \\
&= \frac{e^4}{4s^2} \sum_{spins} v_f(p_2) \bar{v}_a(p_2) (\gamma_\mu)_{ab} u_b(p_1) \bar{u}_e(p_1) (\gamma_\nu)_{ef} \times \\
&\quad \times u_h(p_3) \bar{u}_c(p_3) (\gamma^\mu)_{cd} v_d(p_4) \bar{v}_g(p_4) (\gamma^\nu)_{gh} \\
&= \frac{e^4}{4s^2} \left(Tr \left[(\not{p}_2 - m) \gamma_\mu (\not{p}_1 + m) \gamma_\nu \right] \right) \left(Tr \left[(\not{p}_3 + m) \gamma^\mu (\not{p}_4 - m) \gamma^\nu \right] \right). \tag{71}
\end{aligned}$$

Foi usado as expressões para a contração dos campos. Para ver esse (-1) que surge, consulte a página 229 da referência (SCHWARTZ, 2013).

$$\sum_s u(p, s) \bar{u}(p, s) = \not{p} + m \tag{72}$$

$$\sum_{s'} v(k, s') \bar{v}(k, s') = \not{k} - m. \tag{73}$$

A partir daqui o cálculo é realizado no Mathematica. No anexo apresentamos o código fonte do FeynCalc para realizar nossos cálculos. O resultado obtido para a amplitude do canal-s está de acordo com a literatura, consulte por exemplo a Eq. (32) da referência (TEMPLES, 2024),

$$\mathcal{M}_s^2 = 2e^4 \frac{t^2 + u^2}{s^2}. \tag{74}$$

Aplicando as regras de Feynmann na segunda contribuição, teremos

$$\begin{aligned}
i\mathcal{M}_t &= \bar{u}(p_3, s')(-ie\gamma_\mu)u(p_1, s) \left[\frac{-ig^{\mu\nu}}{(p_1 - p_3)^2} \right] \bar{v}(p_2, r)(-ie\gamma_\nu)v(p_4, r') \\
i\mathcal{M}_t &= i\frac{e^2}{t}\bar{u}(p_3, s')\gamma_\mu u(p_1, s)\bar{v}(p_2, r)\gamma^\mu v(p_4, r') \\
\mathcal{M}_t &= \frac{e^2}{t} \left[\bar{u}(p_3)\gamma_\mu u(p_1) \right] \left[\bar{v}(p_2)\gamma^\mu v(p_4) \right].
\end{aligned} \tag{75}$$

Novamente usando as equações ((68)), ((69))

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_t^\dagger &= \frac{e^2}{t} \left[\bar{u}(p_3)\gamma_\nu u(p_1) \right]^\dagger \left[\bar{v}(p_2)\gamma^\nu v(p_4) \right]^\dagger \\
&= \frac{e^2}{t} \left[\bar{u}(p_1)\gamma_\nu u(p_3) \right] \left[\bar{v}(p_4)\gamma^\nu v(p_2) \right].
\end{aligned} \tag{76}$$

Cálculo da amplitude de espalhamento para o canal t,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4} \sum_{spins} |\mathcal{M}_t|^2 &= \frac{1}{4} \sum_{spins} \mathcal{M}_t \mathcal{M}_t^\dagger = \\
&= \frac{e^4}{4t^2} \sum_{spins} \left[\bar{u}(p_3)\gamma_\mu u(p_1)\bar{v}(p_2)\gamma^\mu v(p_4) \right] \left[\bar{u}(p_1)\gamma_\nu u(p_3)\bar{v}(p_4)\gamma^\nu v(p_2) \right] \\
&= \frac{e^4}{4t^2} \sum_{spins} \bar{u}_a(p_3)(\gamma_\mu)_{ab}u_b(p_1)\bar{v}_c(p_2)(\gamma^\mu)_{cd}v_d(p_4) \times \\
&\quad \times \bar{u}_e(p_1)(\gamma_\nu)_{ef}u_f(p_3)\bar{v}_g(p_4)(\gamma^\nu)_{gh}v_h(p_2) \\
&= (-1)^5 \frac{e^4}{4t^2} \sum_{spins} u_f(p_3)\bar{u}_a(p_3)(\gamma_\mu)_{ab}u_b(p_1)\bar{v}_c(p_2)(\gamma^\mu)_{cd}v_d(p_4) \times \\
&\quad \times \bar{u}_e(p_1)(\gamma_\nu)_{ef}\bar{v}_g(p_4)(\gamma^\nu)_{gh}v_h(p_2) \\
&= (-1)^{5+2} \frac{e^4}{4t^2} \sum_{spins} u_f(p_3)\bar{u}_a(p_3)(\gamma_\mu)_{ab}u_b(p_1)\bar{u}_e(p_1)(\gamma_\nu)_{ef} \times \\
&\quad \times \bar{v}_c(p_2)(\gamma^\mu)_{cd}v_d(p_4)\bar{v}_g(p_4)(\gamma^\nu)_{gh}v_h(p_2) \\
&= (-1)^{7+3} \frac{e^4}{4t^2} \sum_{spins} u_f(p_3)\bar{u}_a(p_3)(\gamma_\mu)_{ab}u_b(p_1)\bar{u}_e(p_1)(\gamma_\nu)_{ef} \times \\
&\quad \times v_h(p_2)\bar{v}_c(p_2)(\gamma^\mu)_{cd}v_d(p_4)\bar{v}_g(p_4)(\gamma^\nu)_{gh} \\
&= \frac{e^4}{4t^2} \sum_{spins} u_f(p_3)\bar{u}_a(p_3)(\gamma_\mu)_{ab}u_b(p_1)\bar{u}_e(p_1)(\gamma_\nu)_{ef} \times \\
&\quad \times v_h(p_2)\bar{v}_c(p_2)(\gamma^\mu)_{cd}v_d(p_4)\bar{v}_g(p_4)(\gamma^\nu)_{gh} \\
&= \frac{e^4}{4t^2} \left(Tr \left[(\not{p}_3 + m)\gamma_\mu(\not{p}_1 + m)\gamma_\nu \right] \right) \left(Tr \left[(\not{p}_2 - m)\gamma^\mu(\not{p}_4 - m)\gamma^\nu \right] \right)
\end{aligned} \tag{77}$$

O resultado obtido para a amplitude do canal-t está de acordo com a literatura, consulte novamente a referência (TEMPLES, 2024), eq. (56),

$$\mathcal{M}_t^2 = 2e^4 \frac{s^2 + u^2}{t^2}. \quad (78)$$

Partimos agora para o cálculo do primeiro termo misto $\mathcal{M}_s \mathcal{M}_t^\dagger$

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \sum_{spins} \mathcal{M}_s \mathcal{M}_t^\dagger &= \frac{e^4}{4st} \sum_{spins} \left[\bar{v}(p_2) \gamma_\mu u(p_1) \bar{u}(p_3) \gamma^\mu v(p_4) \right] \left[\bar{u}(p_1) \gamma_\nu u(p_3) \bar{v}(p_4) \gamma^\nu v(p_2) \right] \\ &= \frac{e^4}{4st} \sum_{spins} \bar{v}_a(p_2) (\gamma_\mu)_{ab} u_b(p_1) \bar{u}_c(p_3) (\gamma^\mu)_{cd} v_d(p_4) \times \\ &\quad \times \bar{u}_e(p_1) (\gamma_\nu)_{ef} u_f(p_3) \bar{v}_g(p_4) (\gamma^\nu)_{gh} v_h(p_2) \\ &= (-1)^7 \frac{e^4}{4st} \sum_{spins} v_h(p_2) \bar{v}_a(p_2) (\gamma_\mu)_{ab} u_b(p_1) \bar{u}_c(p_3) (\gamma^\mu)_{cd} v_d(p_4) \times \\ &\quad \times \bar{u}_e(p_1) (\gamma_\nu)_{ef} u_f(p_3) \bar{v}_g(p_4) (\gamma^\nu)_{gh} \\ &= (-1)^{7+2} \frac{e^4}{4st} \sum_{spins} v_h(p_2) \bar{v}_a(p_2) (\gamma_\mu)_{ab} u_b(p_1) \bar{u}_e(p_1) (\gamma_\nu)_{ef} u_f(p_3) \times \\ &\quad \times \bar{u}_c(p_3) (\gamma^\mu)_{cd} v_d(p_4) \bar{v}_g(p_4) (\gamma^\nu)_{gh} \\ &= -\frac{e^4}{4st} \left(Tr \left[(\not{p}_2 - m) \gamma_\mu (\not{p}_1 + m) \gamma_\nu (\not{p}_3 + m) \gamma^\mu (\not{p}_4 - m) \gamma^\nu \right] \right). \quad (79) \end{aligned}$$

O resultado obtido para está de acordo com a literatura, consulte novamente a referência (TEMPLES, 2024), eq. (77),

$$\mathcal{M}_{st}^2 = 2 \frac{e^4}{st} u^2. \quad (80)$$

Cálculo do segundo termo misto $\mathcal{M}_t \mathcal{M}_s^\dagger$

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \sum_{spins} \mathcal{M}_t \mathcal{M}_s^\dagger &= \frac{e^4}{4ts} \sum_{spins} \left[\bar{u}(p_3) \gamma_\mu u(p_1) \bar{v}(p_2) \gamma^\mu v(p_4) \right] \left[\bar{u}(p_1) \gamma_\nu v(p_2) \bar{v}(p_4) \gamma^\nu u(p_3) \right] \\ &= \frac{e^4}{4ts} \sum_{spins} \bar{u}_a(p_3) (\gamma_\mu)_{ab} u_b(p_1) \bar{v}_c(p_2) (\gamma^\mu)_{cd} v_d(p_4) \times \\ &\quad \times \bar{u}_e(p_1) (\gamma_\nu)_{ef} v_f(p_2) \bar{v}_g(p_4) (\gamma^\nu)_{gh} u_h(p_3) \\ &= (-1)^7 \frac{e^4}{4ts} \sum_{spins} u_h(p_3) \bar{u}_a(p_3) (\gamma_\mu)_{ab} u_b(p_1) \bar{v}_c(p_2) (\gamma^\mu)_{cd} v_d(p_4) \times \\ &\quad \times \bar{u}_e(p_1) (\gamma_\nu)_{ef} v_f(p_2) \bar{v}_g(p_4) (\gamma^\nu)_{gh} \\ &= (-1)^{7+2} \frac{e^4}{4ts} \sum_{spins} u_h(p_3) \bar{u}_a(p_3) (\gamma_\mu)_{ab} u_b(p_1) \bar{u}_e(p_1) (\gamma_\nu)_{ef} v_f(p_2) \times \\ &\quad \times \bar{v}_c(p_2) (\gamma^\mu)_{cd} v_d(p_4) \bar{v}_g(p_4) (\gamma^\nu)_{gh} \\ &= -\frac{e^4}{4ts} \left(Tr \left[(\not{p}_3 + m) \gamma_\mu (\not{p}_1 + m) \gamma_\nu (\not{p}_2 - m) \gamma^\mu (\not{p}_4 - m) \gamma^\nu \right] \right). \quad (81) \end{aligned}$$

Novamente o resultado obtido para está de acordo com a literatura, consulte novamente a referência (TEMPLES, 2024), eq. (79),

$$\mathcal{M}_{ts}^2 = 2 \frac{e^4}{st} u^2. \quad (82)$$

Substituindo as equações (74), (78), (80) e (82) em (52) chegamos ao resultado

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{2s} \left[\left(\frac{t}{s}\right)^2 + \left(\frac{s}{t}\right)^2 + u^2 \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{t}\right)^2 \right]. \quad (83)$$

Se integrarmos sobre o azimute, adquirimos um fator de 2π , produzindo

$$\frac{d\sigma}{d\cos\theta} = \frac{\pi\alpha^2}{s} \left[\left(\frac{t}{s}\right)^2 + \left(\frac{s}{t}\right)^2 + u^2 \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{t}\right)^2 \right]. \quad (84)$$

Apresentamos a seguir um gráfico comparativo que confronta os resultados teóricos previstos pela QED na eq.(84) com os dados experimentais. Utilizando o nosso código, foi possível reproduzir esse gráfico a partir dos resultados gerados pelo Mathematica.

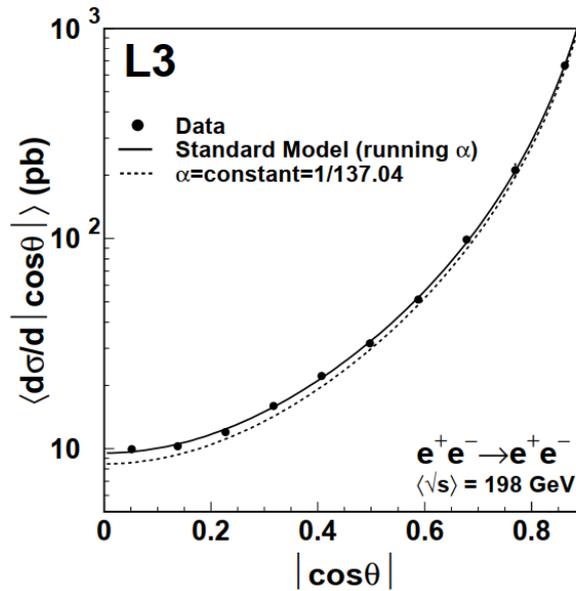


Figura 1 – Resultados experimentais do CERN. Fonte: Ref. [13].

7 CONCLUSÃO

Este trabalho teve como objetivo explorar a teoria quântica de campos, com foco na eletrodinâmica quântica (QED), por meio de uma análise detalhada do espalhamento Bhabha. O estudo demonstrou como os conceitos e técnicas da QED são aplicados para descrever interações entre elétrons e pósitrons.

Os objetivos propostos no início do trabalho foram alcançados. Foi possível revisar e consolidar os principais marcos históricos da QED, desde suas origens nas ideias de Faraday e Maxwell até as sofisticadas formulações de Feynman, Schwinger e Tomonaga. A QED se estabeleceu como uma teoria fundamental na física moderna, detalhando os métodos matemáticos usados para descrever essas interações e aplicando esses conceitos ao cálculo do espalhamento Bhabha. Este trabalho proporcionou uma visão abrangente de como a QED não apenas unifica a eletrodinâmica, a mecânica quântica e a relatividade, mas também fornece previsões precisas que são confirmadas experimentalmente.

Durante o desenvolvimento do trabalho, foram identificadas algumas limitações e desafios. A complexidade matemática envolvida nos cálculos apresentou dificuldades significativas. Além disso, a interpretação dos resultados experimentais requer uma compreensão profunda tanto dos princípios teóricos quanto dos detalhes experimentais. Apesar dessas dificuldades, os métodos e conceitos abordados neste trabalho provaram ser robustos e aplicáveis a uma variedade de problemas em física de partículas.

Para trabalhos futuros, existem diversas oportunidades de expansão. Uma área promissora é a aplicação das técnicas da QED a sistemas mais complexos, como interações envolvendo outras partículas do Modelo Padrão. Além disso, a integração da QED com outras teorias de campo, como a cromodinâmica quântica (QCD), pode oferecer novos insights sobre a estrutura fundamental da matéria. Projetos futuros também poderiam se concentrar no desenvolvimento de novas ferramentas computacionais para simplificar os cálculos da QED, tornando-os mais acessíveis a pesquisadores e estudantes.

Portanto, este trabalho não apenas atingiu seus objetivos iniciais, mas também abriu caminho para novas investigações e avanços na teoria quântica de campos. A QED, com sua precisão e elegância, continua sendo uma pedra angular na compreensão das interações fundamentais da natureza.

REFERÊNCIAS

- [1] BHABHA, H., *The Scattering of Positrons by Electrons with Exchange on Dirac's Theory of the Positron*, Proc. Roy. Soc. **A154** (1936) 195.
- [2] DIRAC, P. A. M., *The quantum theory of the electron*, Proc. Roy. Soc. London A **117** 610 (1928).
- [3] DIRAC, P. A. M., *The quantum theory of the electron - Part II*, Proc. Roy. Soc. London A **118** 351 (1928).
- [4] FEYNMAN, R. P., *Mathematical Formulation of the Quantum Theory of Electromagnetic Interaction*, Phys. Rev. **80**, 440 (1950).
- [5] GLASHOW, S. L., *Partial-symmetries of weak interactions*, Nucl. Phys. **22**, 579 (1961).
- [6] JACKSON, J. D., *Classical Electrodynamics*, 2nd Edition, John Wiley Sons (1975).
- [7] L3 COLLABORATION, *Measurement of the Running of the Electromagnetic Coupling at Large Momentum-Transfer at LEP*, arXiv:hep-ex/0507078.
- [8] MANDL, F., SHAW, G., *Quantum Field Theory*, Wiley (1984).
- [9] PESKIN, M. E.; SCHROEDER, D. V., *An Introduction to Quantum Field Theory*, Addison-Wesley (1995).
- [10] RYDER, L. H., *Quantum Field Theory*, Cambridge University Press (1985).
- [11] SALAM, A.; WARD, J. C., *On a Gauge Theory of Elementary Interactions*, Nuovo Cim. **19**, 161 (1961).
- [12] SCHWARTZ, M. D., *Quantum Field Theory and the Standard Model*, Cambridge University Press (2013).
- [13] SCHWINGER, J., *Quantum Electrodynamics. I. A Covariant Formulation*, Phys. Rev. **74**, 1439 (1948).

-
- [14] TEMPLES, Dylan J., *Notas de aulas*, Disponível em: "<http://www.dylanjtemples.com>". Acesso em 25/08/2024.
- [15] TOMONAGA, S., *On a Relativistically Invariant Formulation of the Quantum Theory of Wave Fields*, Prog. Theoret. Phys. **1**, 27 (1946).
- [16] WEINBERG, S., *A Model of Leptons*, Phys. Rev. Lett. **19**, 1264 (1967).

APÊNDICE A - CONCEITOS GERAIS BÁSICOS USADOS NESSE TRABALHO

As transformações de Lorentz tem a característica de misturar as coordenadas do espaço e do tempo. Por exemplo:

Para um quadri-vetor contravariante $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, x, y, z) = (ct, \vec{r})$,

$$\begin{aligned} ct' &= \gamma(ct - \beta x) \\ x' &= \gamma(x - vt) \\ y' &= y \\ z' &= z. \end{aligned} \tag{85}$$

As transformações de Lorentz assumem um aspecto mais simples quando expressas em termos de $x^0 \equiv ct$ e $\beta \equiv v/c$. Na forma matricial (85) torna-se

$$\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \Lambda \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}, \tag{86}$$

onde Λ é a matriz de transformação de Lorentz. Cada elemento pode ser representado por $x'^\mu = \sum_{\nu=0}^3 \Lambda_\nu^\mu x^\nu$. Para um quadri-vetor covariante $x_\mu = (x_0, x_1, x_2, x_3) = (t, -x, -y, -z) = (ct, -\vec{r})$, as transformações de Lorentz são

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x + vt) \\ y' &= y \\ z' &= z \\ ct' &= \gamma(ct + \beta x). \end{aligned} \tag{87}$$

Índice de Lorentz:

$$\beta = \frac{v}{c} < 1 \tag{88}$$

$$\gamma = \sqrt{\frac{1}{1 - \beta^2}}. \tag{89}$$

Transformação de paridade

$$P : (t, x, y, z) \rightarrow (t, -x, -y, -z). \tag{90}$$

Transformação reversão temporal

$$T : (t, x, y, z) \rightarrow (-t, x, y, z). \quad (91)$$

Quadri-vetor tipo-tempo

$$x^\mu x_\mu > 0. \quad (92)$$

Quadri-vetor tipo-espaço

$$x^\mu x_\mu < 0. \quad (93)$$

Quadri-vetor tipo-luz

$$x^\mu x_\mu = 0. \quad (94)$$

A matriz γ_5 é definida por

$$\gamma_5 = \gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3. \quad (95)$$

e satisfaz as propriedades

$$\gamma_5\gamma^\mu = 0, \quad (96)$$

$$(\gamma_5)^2 = 1. \quad (97)$$

A matriz γ_5 é hermitiana, com $tr\gamma_5\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\gamma\gamma^\delta = 4i\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$.

ANEXO A - CÓDIGO FONTE DO MATHEMATICA PARA O ESPALHAMENTO BHABHA

(* Para rodar o FeynCalc *)

<< FeynCalc

(* Atribui massa igual a zero. *)

m = 0;

(* Relaciona os produtos escalares dos momentos com as variáveis de Mandelstam *)

**Mand = {SP [p1, p2] → $\frac{s}{2}$, SP [p3, p4] → $\frac{s}{2}$, SP [p1, p3] → $-\frac{t}{2}$, SP [p4, p2] → $-\frac{t}{2}$, SP [p1, p4] → $-\frac{u}{2}$,
SP [p2, p3] → $-\frac{u}{2}$ };**

(* Relaciona os produtos escalares dos momentos com o ângulo de espalhamento *)

angular = {t → $\frac{-s(1-\text{Cos}[\theta])}{2}$, u → $\frac{-s(1+\text{Cos}[\theta])}{2}$ };

(* Expressões dos traços do Canal s *)

line1s = (GS [p2] - m) .GA[μ] . (GS [p1] + m) .GA[ν];

line2s = (GS [p3] + m) .GA[μ] . (GS [p4] - m) .GA[ν];

(* Cálculo dos traços do Canal s *)

trace1s = DiracTrace[line1s, DiracTraceEvaluate → True];

trace2s = DiracTrace[line2s, DiracTraceEvaluate → True];

(* Cálculo da amplitude de espalhamento do canal s *)

AMPs = $\frac{e^4}{4s^2}$ Contract[trace1s trace2s] // FCE;

(* Deixando o resultado anterior em termos das variáveis de Mandelstam. Observe o resultado abaixo com a Equação 32 da Referência TEMPLES, D. J *)

Ms = Simplify[AMPs/.Mand]

$$\frac{2e^4(t^2+u^2)}{s^2}$$

(* Expressões dos traços do Canal t *)

line1t = (GS [p3] + m) .GA[μ] . (GS [p1] + m) .GA[ν];

line2t = (GS [p2] - m) .GA[μ] . (GS [p4] - m) .GA[ν];

(* Cálculo dos traços do Canal t *)

trace1t = DiracTrace[line1t, DiracTraceEvaluate → True];

trace2t = DiracTrace[line2t, DiracTraceEvaluate → True];

(* Cálculo da amplitude de espalhamento do canal t. *)

AMPt = $\frac{e^4}{4t^2}$ Contract[trace1t trace2t] // FCE;

(* Deixando o resultado anterior em termos das variáveis de Mandelstam. Observe o resultado abaixo com a Equação 56 da Referência TEMPLES, D. J *)

Mt = Simplify[AMPt/.Mand]

$$\frac{2e^4(s^2+u^2)}{t^2}$$

(* Expressão do traço do termo cruzado $M_s M_t^\dagger$ *)

linest = (GS [p2] - m) .GA[μ] . (GS [p1] + m) .GA[ν] . (GS [p3] + m) .GA[μ] . (GS [p4] - m) .GA[ν];

(* Cálculo do traço do termo cruzado $M_s M_t^\dagger$ *)

tracest = DiracTrace[linest, DiracTraceEvaluate → True];

(* Cálculo da amplitude de espalhamento do termo cruzado $M_s M_t^\dagger$ *)

AMPst = $-\frac{e^4}{4s*t}$ Contract[tracest] // FCE;

(* Deixando o resultado anterior em termos das variáveis de Mandelstam. Observe o resultado abaixo com a Equação 77 da Referência TEMPLES, D. J *)

Mst = Simplify[AMPst/.Mand]

$$\frac{2e^4 u^2}{st}$$

(* Expressão do traço do termo cruzado $M_t M_s^\dagger$ *)

$$\text{linets} = (\text{GS}[p_3] + m) \cdot \text{GA}[\mu] \cdot (\text{GS}[p_1] + m) \cdot \text{GA}[\nu] \cdot (\text{GS}[p_2] - m) \cdot \text{GA}[\mu] \cdot (\text{GS}[p_4] - m) \cdot \text{GA}[\nu];$$

(* Cálculo do traço do termo cruzado $M_t M_s^\dagger$ *)

$$\text{tracets} = \text{DiracTrace}[\text{linets}, \text{DiracTraceEvaluate} \rightarrow \text{True}];$$

(* Cálculo da amplitude de espalhamento do termo cruzado $M_t M_s^\dagger$ *)

$$\text{AMPts} = -\frac{e^4}{4t*s} \text{Contract}[\text{tracets}]/\text{FCE};$$

(* Deixando o resultado anterior em termos das variáveis de Mandelstam. *)

$$\text{Mts} = \text{Simplify}[\text{AMPts}/\text{Mand}]$$

$$\frac{2e^4 u^2}{st}$$

(* Amplitude de espalhamento total *)

$$\text{AMP} = \text{Ms} + \text{Mt} + \text{Mst} + \text{Mts}$$

$$\frac{2e^4(s^2+u^2)}{t^2} + \frac{2e^4(t^2+u^2)}{s^2} + \frac{4e^4 u^2}{st}$$

(* Resultado em termo da constante de estrutura final α *)

$$\text{sechoq2} = \frac{\text{AMP}}{64\pi^2 s} / \{e^4 \rightarrow (4\pi)^2 \alpha^2\}$$

$$\frac{32\pi^2 \alpha^2 (s^2+u^2)}{t^2} + \frac{32\pi^2 \alpha^2 (t^2+u^2)}{s^2} + \frac{64\pi^2 \alpha^2 u^2}{st}$$

(* Observe o resultado abaixo com a Equação 85 da Referência TEMPLES, D. J *)

$$\text{sechoq3} = \text{Expand}[\text{sechoq2}]$$

$$\frac{\alpha^2 t^2}{2s^3} + \frac{\alpha^2 u^2}{2s^3} + \frac{\alpha^2 u^2}{s^2 t} + \frac{\alpha^2 s}{2t^2} + \frac{\alpha^2 u^2}{2st^2}$$

(* Manipulações para deixar idêntico com a Equação 85 da Referência TEMPLES, D. J *)

$$\text{sechoq4} = \text{Expand} \left[\text{sechoq3} / \left(\frac{\alpha^2}{2s} \right) \right];$$

$$\text{termo1} = \text{Coefficient}[\text{sechoq4}, 1/s^2] 1/s^2;$$

$$\text{termo2} = \text{Coefficient}[\text{sechoq4}, 1/t^2] 1/t^2;$$

$$\text{termo3} = \text{Coefficient}[\text{sechoq4}, 1/(s*t)] 1/(s*t);$$

$$\text{soma} = \text{termo1} + \text{termo2} + \text{termo3};$$

(* Observe o resultado abaixo com a Equação 85 da Referência TEMPLES, D. J *)

$$\frac{\alpha^2}{2s} \cdot \text{soma}$$

$$\frac{\alpha^2}{2s} \cdot \left(\frac{s^2+u^2}{t^2} + \frac{t^2+u^2}{s^2} + \frac{2u^2}{st} \right)$$

(* Observe o resultado abaixo com a Equação 88 da Referência TEMPLES, D. J *)

$$\text{sechoq5} = 2\pi \text{sechoq3} / \text{angular};$$

$$\text{sechoq6} = \text{Simplify}[\text{sechoq5}];$$

$$\text{sechoq7} = \text{sechoq6} / \{ \text{Cos}[2\theta] \rightarrow 2(\text{Cos}[\theta])^2 - 1 \}$$

$$\frac{\pi \alpha^2 (2 \cos(\theta) + 6)^2}{8s(\cos(\theta) - 1)^2}$$

(* Observe o resultado abaixo com a Equação 96 da Referência TEMPLES, D. J *)

$$\text{sechoq8} = \text{Simplify}[\text{sechoq7}]$$

$$\frac{\pi \alpha^2 (\cos^2(\theta) + 3)^2}{2s(\cos(\theta) - 1)^2}$$

(* Gráfico *)

$$2\pi * \text{sechoq8} / \{ \text{Cos}[\theta] \rightarrow x, \alpha \rightarrow 1/137 \}$$

$$\frac{\pi^2 (x^2 + 3)^2}{18769s(x-1)^2}$$

$$\text{Plot} \left[\frac{\pi^2 (x^2 + 3)^2}{1000s(x-1)^2}, \{x, -0.9, 0.9\}, \text{PlotRange} \rightarrow \{10^{-2}, 1\}, \text{Axes} \rightarrow \{\text{True}, \text{True}\} \right]$$

