



INSTITUTO FEDERAL DO SERTÃO PERNAMBUCANO  
CAMPUS SERRA TALHADA  
CURSO DE LICENCIATURA EM FÍSICA

Pedro Gabriel Silva dos Santos

## **Precificação de opções de compra europeias do mercado brasileiro através do modelo de regressão à média**

Serra Talhada - PE

2025

Pedro Gabriel Silva dos Santos

**Precificação de opções de compra europeias do mercado brasileiro através do  
modelo de regressão à média**

Trabalho de Conclusão de Curso de Licenciatura em Física do Instituto Federal do Sertão Pernambucano campus Serra Talhada como requisito para a obtenção do título de Licenciado em Física.

Orientador: Prof. Dr. Daniel de Souza Santos

Serra Talhada - PE

2025

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

---

S237 Santos, Pedro Gabriel Silva dos.

Precificação de opções de compra europeias do mercado brasileiro através do modelo de regressão à média / Pedro Gabriel Silva dos Santos. - Serra Talhada, 2025.  
40 f. : il.

Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Física) -Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Sertão Pernambucano, Campus Serra Talhada, 2025.  
Orientação: Prof. Dr. Daniel de Souza Santos.

1. Física. 2. Econofísica. 3. Opções. 4. Simulação de Monte Carlo. 5. Regressão à média. I. Título.

CDD 530

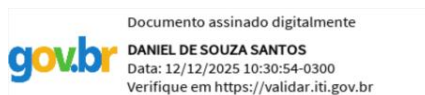
Pedro Gabriel Silva dos Santos

**Precificação de opções de compra europeias do mercado brasileiro através do modelo de regressão à média**

Este Trabalho de Conclusão de Curso foi julgado adequado para obtenção do Título de “Licenciado em Física” e aprovado em sua forma final pelo Curso de Graduação em Licenciatura em Física.

Serra Talhada – PE, 12 de dezembro de 2025.

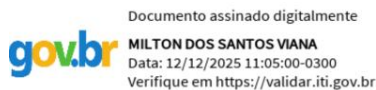
**Banca Examinadora:**



---

Prof. Dr. Daniel de Souza Santos

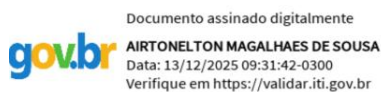
Instituto Federal do Sertão Pernambucano



---

Prof. Dr. Milton dos Santos Viana

Instituto Federal de Pernambuco

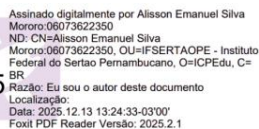


---

Prof. Me. Airtonelton Magalhães de Sousa

Instituto Federal do Sertão Pernambucano

Alisson Emanuel  
Silva  
Mororo:0607362235  
0



---

Prof. Me. Alisson Emanuel Silva Mororó

Instituto Federal do Sertão Pernambucano

## AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, a Deus por ter me conservado vivo e em plena saúde.

A mainha, por ser o meu maior exemplo de ser humano.

A minha família: vó Lourdes, vó Rita, vô Rafael, vô Tião, Ney, por me criarem.

A Sofia e Laura, por aguentarem o irmão mais pentelho de todos.

Ao Prof. Dr. Daniel Souza, cuja ajuda foi crucial para a existência deste trabalho e ao Prof. Dr. Emerson Freitas por me forçar a aprender LaTeX.

A Marina, por me ensinar o profundo valor do silêncio e da meditação.

A Leca, por cada noite mal dormida.

A Gláuber, por me conceder uma amizade tão valiosa quanto improvável.

A Jonas, Marília e Victoria. Por acolherem a minha loucura com fidelidade e ternura.

Aos meus colegas do PIBID: Erison, Bruno, Jêsitto, Isabela, Fernanda Letícia, Maria Luiza e Dani. A companhia de vocês fez com que as segundas-feiras fossem muito mais toleráveis.

*"All models are wrong but some are useful"*

George E. P. Box

## RESUMO

O mercado de opções vem se expandindo em ritmo significativo a cada ano, aumentando a importância de métodos precisos de precificação de opções. Abordagens tradicionais incluem o consagrado modelo de Black-Scholes, um modelo de grande valor teórico, porém com limitada aplicabilidade prática no *trading*. Este trabalho investiga a eficiência da simulação de Monte Carlo como técnica alternativa para determinar o prêmio de uma opção de compra europeia. As simulações são construídas a partir do modelo de regressão à média, um fenômeno estatístico que estabelece que, após uma medida extrema, a próxima tende a se aproximar mais da média histórica do sistema. Esse modelo é particularmente pertinente para a precificação de opções, uma vez que o preço de uma ação pode sofrer saltos abruptos antes de retornar ao seu preço médio de longo prazo. Embora o método de Monte Carlo para regressão à média já tenha sido descrito teoricamente, há uma notável escassez de estudos empíricos que o utilizem para calcular o preço de opções. Neste trabalho, o método foi implementado em Python, assim como a solução analítica de Black-Scholes. Os resultados de cada método foram então comparados aos preços reais de contratos de opção PETR4 para fins de análise de erro.

**Palavras-chave:** opções europeias; simulação de Monte Carlo; regressão à média.

## ABSTRACT

The options market has been expanding at a significant rate each year, raising the importance of accurate option pricing methods. Traditional approaches include the well-established Black-Scholes model, a model that holds great theoretical value but lacks trading applicability. This work investigates the efficiency of Monte Carlo simulation as an alternative technique to determine the premium of a European call option. The simulations are built around the regression-to-the-mean model, a statistical phenomenon that stipulates that after an extreme measurement, the next one is more likely to be closer to the historical mean of the system. This model is compelling for option pricing, as the price of stock can suffer abrupt jumps before returning to the long-term mean. Although the Monte Carlo for mean regression method was already described theoretically, there is a noticeable lack of empirical studies that employ it as a way to calculate the option price. In this work, the method was implemented in Python, as well as the Black-Scholes analytical solution. The results of each method were then compared to the actual prices of PETR4 option contracts for error analysis.

**Keywords:** european options; Monte Carlo simulation; reversion to the mean.



## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – <i>Payoff</i> de uma <i>call</i> europeia em posição comprada . . . . .	15
Figura 2 – <i>Payoff</i> de uma <i>call</i> europeia em posição vendida . . . . .	16
Figura 3 – Retorno de uma <i>call</i> europeia em posição comprada . . . . .	17
Figura 4 – Retorno de uma <i>call</i> europeia em posição vendida . . . . .	17
Figura 5 – Caminhos para 5 simulações e 10 simulações . . . . .	24
Figura 6 – Caminhos para 25 simulações e 50 simulações . . . . .	24
Figura 7 – Caminhos para 100 simulações . . . . .	25
Figura 8 – Procedimentos Metodológicos . . . . .	27
Figura 9 – Gráficos das opções PETRD122 e PETRD220 . . . . .	30
Figura 10 – Gráficos das opções PETRD271 e PETRD291 . . . . .	31

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1	–	Representações . . . . .	14
Tabela 2	–	Variáveis $z_t$ sorteadas . . . . .	22
Tabela 3	–	Trajetórias do preço do ativo ( <i>spot</i> ) . . . . .	23
Tabela 4	–	<i>Payoff</i> de cada trajetória . . . . .	23
Tabela 5	–	Código internacional para o mês de vencimento . . . . .	26
Tabela 6	–	Erros estatísticos do modelo de Black-Scholes . . . . .	29
Tabela 7	–	Erros estatísticos do simulação de Métricas de erro do modelo MC . . .	30
Tabela 8	–	Valores de $\varphi$ que otimizam o MSE . . . . .	31
Tabela 9	–	Valores de $\varphi$ que otimizam o MAPE . . . . .	32

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO . . . . .</b>	<b>11</b>
1.1	O MERCADO DE OPÇÕES . . . . .	11
1.2	OBJETIVOS . . . . .	12
1.2.1	Objetivo Geral . . . . .	12
1.2.2	Objetivos específicos . . . . .	12
<b>2</b>	<b>REVISÃO BIBLIOGRÁFICA . . . . .</b>	<b>13</b>
2.1	OPÇÕES . . . . .	13
2.1.1	Características . . . . .	13
2.1.2	Moneyness . . . . .	14
2.1.3	Payoff de uma call . . . . .	15
2.2	BLACK-SCHOLES . . . . .	18
2.3	SIMULAÇÃO DE MONTE CARLO . . . . .	20
2.3.1	Lei dos Grandes Números . . . . .	20
2.3.2	Regressão à média . . . . .	21
<b>3</b>	<b>METODOLOGIA . . . . .</b>	<b>26</b>
3.1	DADOS . . . . .	26
3.2	IMPLEMENTAÇÃO DO MODELO . . . . .	26
3.3	MÉTRICAS DE ERRO . . . . .	28
3.3.1	MAE . . . . .	28
3.3.2	MSE . . . . .	28
3.3.3	MAPE . . . . .	28
<b>4</b>	<b>RESULTADOS . . . . .</b>	<b>29</b>
4.1	BLACK-SCHOLES . . . . .	29
4.2	SIMULAÇÃO DE MONTE CARLO . . . . .	29
4.3	VELOCIDADE DE REGRESSÃO . . . . .	31
<b>5</b>	<b>CONCLUSÕES . . . . .</b>	<b>33</b>
	<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>	<b>34</b>
	<b>APÊNDICE A – GRÁFICOS COM TRAJETÓRIAS . . . . .</b>	<b>37</b>

# 1 INTRODUÇÃO

## 1.1 O MERCADO DE OPÇÕES

Derivativos são uma espécie de contrato financeiro que está associados a outro produto (ativo). Esse ativo pode ser uma ação de uma empresa de capital aberto, uma *commodity* ou uma moeda. Opções são derivativos que garantem o direito de comprar ou vender o ativo a um preço pré-acordado mediante o pagamento de um prêmio (valor pago para possuir a opção) (Jarrow; Chatterjea, 2024).

Em 2019, a *Options Clearing Corporation* (OCC), corporação responsável por validar todas as negociações de contratos de opções nos Estados Unidos, emitiu em seu relatório anual um volume total de 5 bilhões de contratos negociados. Em 2024 o número anunciado foi de 12 bilhões de contratos negociados, um aumento de 140% no volume de negociações em 5 anos. Esse aumento é equivalente ao aumento entre 2006 (2 bilhões de contratos) e 2018 (5 bilhões de contratos), um intervalo de 12 anos. O mercado de opções não só cresce, como cresce rapidamente.

No cerne do estudo sobre opções está o problema da precificação. Avaliar o prêmio do contrato com um preço adequado, levando em conta a natureza do ativo e a volatilidade do mercado, é fundamental para a saúde do mercado. Existem tentativas de precificação de opções pelo menos desde o século XVII, entretanto o marco histórico acontece em 1973 quando Fisher Black e Myron Scholes publicam sua proposta para a precificação de opções expressando o valor do ativo por meio de uma equação diferencial. Posteriormente, Robert Merton aprimoraria o trabalho de Black e Scholes e constituiria o modelo de Black-Scholes-Merton (comumente referido como modelo de Black-Scholes). Em 1997 a Academia Real Sueca de Ciências laureou Scholes e Merton com o Nobel de Ciências Econômicas, pelo novo método de precificar opções. Fisher Black morrera em 1995 e por isso não foi laureado, uma vez que o prêmio não é concedido postumamente.

O modelo de Black-Scholes, apesar de ser a primeira formulação matematicamente rigorosa para a precificação de opções, possui limitações. Algumas das premissas usadas para resolver analiticamente o problema, como volatilidade e taxa de juros livre de risco constantes, fazem com que sua aplicação gere resultados muito distantes da realidade. Haug e Taleb (2008) irão defender que o modelo não passa de um mero experimento mental.

O avanço do poder computacional permitiu que métodos numéricos se tornassem uma alternativa poderosa para resolver problemas cuja solução analítica é excessivamente trabalhosa ou está constricta a premissas que tornem inviáveis a sua aplicabilidade no mundo real. Este trabalho utiliza um destes métodos computacionais, a simulação de Monte Carlo, para encontrar o preço de opções de compra europeia.

O trabalho está organizado da seguinte maneira: no Capítulo 2 estão descritos os principais conceitos discutidos (opções, modelo de Black-Scholes, simulação de Monte

Carlo, modelo de regressão à média). No capítulo 3, estão descritos os procedimentos metodológicos adotados para avaliar a viabilidade do modelo proposto. No capítulo 4, estão expostos os resultados das simulações e a análise de erro do modelo proposto comparada a análise de erro do modelo clássico de Black-Scholes. No capítulo 5, estão as conclusões extraídas dos resultados obtidos.

## 1.2 OBJETIVOS

### 1.2.1 Objetivo Geral

Estudar a eficiência da Simulação de Monte Carlo aplicada a um modelo de regressão à média como técnica para precificar opções, comparando seu desempenho com a solução analítica de Black-Scholes.

### 1.2.2 Objetivos específicos

- Implementar a simulação de Monte Carlo para regressão à média;
- Comparar o erro da simulação com o resultado da solução analítica de Black-Scholes para os mesmos parâmetros;
- Examinar a existência de valores ótimos para velocidade de regressão ( $\varphi$ ).

## 2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

### 2.1 OPÇÕES

Opções são uma espécie de derivativo, produtos financeiros que estão associados a um determinado ativo. Adquirir uma opção concede ao comprador dela (denominado “titular da opção”) o direito de executar uma determinada operação financeira (Molero; Mello, 2019, p. 164).

- A opção pode conceder ao titular o direito de comprar algo por um determinado preço, esse tipo de opção chamamos de *call*.
- A opção pode também conceder o direito de vender algo por um determinado preço, esse tipo de opção chamamos de *put*.

Chama-se aquele que oferta a opção de “lançador da opção”. O lançador oferta uma opção (seja uma *call* ou uma *put*) e é possível adquiri-la através do pagamento de um prêmio, que consiste em um valor em dinheiro para adquirir a opção e se tornar o titular da mesma. Enquanto a opção concede ao titular um direito; ela concede ao lançador um dever, mesmo que a execução de uma opção não seja financeiramente vantajosa para o lançador ele é obrigado a acatar a vontade do titular (contanto que ela ocorra dentro dos termos do contrato).

O valor do prêmio depende de diversos fatores, principalmente do valor do ativo que está associado àquela opção (Pfützenreuter, 2021, p.21). Essa dinâmica entre o valor atual do ativo e o valor de execução de uma opção (preço determinado) permite que através da negociação de opções seja possível lucrar ou perder dinheiro.

#### 2.1.1 Características

Segundo Wilmott (1998, p. 26) as principais características de um contrato de opção são:

- Prêmio - o valor pago para ser titular de uma opção.
- Ativo Subjacente - o ativo no qual o valor da opção está baseado, o preço desse ativo é comumente chamado de *spot*.
- Vencimento - a data limite de vigência do contrato de opção.
- Preço de exercício ou *strike* - o preço de liquidação preestabelecido no contrato (o preço de venda ou compra do ativo).
- *Payoff* - representa o lucro do titular da opção com a execução do contrato.
- Posição comprada - a posição do titular em relação ao prêmio.
- Posição vendida - a posição do lançador em relação ao prêmio.

Alguns desses elementos serão utilizados nos cálculos para precificar a opção, segue uma tabela com a representação usual:

Tabela 1 – Representações

Prêmio de uma call	$c$
Prêmio de uma put	$p$
Vencimento	$T$
Preço de exercício ( <i>strike</i> )	$K$
Preço do ativo subjacente ( <i>spot</i> )	$S$

Fonte: Autoria própria.

Outra noção importante é que não existe apenas um estilo de opção, elas são divididas de acordo com a permissão do exercício (Pfützenreuter, 2021, p.36-37):

- **Opções Europeias:** Exercício permitido no dia do vencimento.
- **Opções Americanas:** Exercício permitido até o dia do vencimento.
- **Opções Asiáticas:** Concedem ao comprador o direito sobre um preço médio do ativo subjacente.
- **Opções das Bermudas:** Exercício permitido em datas específicas antes do vencimento.
- **Opções de Barreira:** Perdem a validade se o preço do ativo subjacente cruzar um certo limite (para cima ou para baixo).

O detentor da opção dispõe de um título que o permita comprar uma ação mais barato que o valor atual de mercado (*call*) ou também lhe concede o direito de vender uma ação a um preço superior ao valor atual de mercado (*put*). Dessa forma o detentor da ação pode lucrar, executando a sua opção ou até mesmo a vendendo para terceiros que possuam interesse. Entretanto, levando em conta o valor atual de mercado e o valor de execução da opção também é possível que o título não tenha valor algum, nesse caso dizemos que a opção “virou pó”. Nesse cenário o lançador lucra, pois recebeu o prêmio da opção e ela não será executada.

No Brasil as negociações de opções são realizadas na Brasil, Bolsa, Balcão (B3); que é, até então, a única bolsa de valores em atividade no Brasil.

### 2.1.2 Moneyness

Por ser um derivativo, o valor de uma opção é diretamente ligado ao valor do ativo subjacente. É crucial analisar a relação entre *strike* e *spot*. Essa relação pode se encontrar em três estados:

- $S > K$ : O preço do ativo é superior ao preço de exercício, nesse caso é vantajoso executar a opção. Dizemos que esta opção está *in the money* (no dinheiro).

- $S = K$ : O preço do ativo é igual ao preço de exercício. Dizemos que esta opção está *at the money* (no dinheiro).
- $S < K$ : O preço do ativo é inferior ao preço de exercício, nesse caso é desvantajoso executar a opção. Dizemos que esta opção está *out of the money* (fora do dinheiro)

As relações citadas se aplicam a *calls*, para o caso de *puts* a lógica é inversa.

Chamamos esses estados de *moneyness* da opção. No primeiro estado o titular da opção possui vantagem, tem a oportunidade de comprar abaixo do preço de mercado. Nos segundo e terceiro o lançador é que tem vantagem, lucrou o prêmio da opção que não será executada.

### 2.1.3 Payoff de uma call

O *payoff* de uma opção é a diferença entre o preço de exercício ( $K$ ) e o preço do ativo ( $S$ ). Para opções europeias, essa diferença é analisada na data de vencimento ( $T$ ) da opção, dia em que ela pode ser liquidada. Para calcular o *payoff* é necessário levar em conta:

1. Se a opção é uma *call* ou uma *put*.
2. A posição do operador em relação à opção (comprada ou vendida).

O cálculo do *payoff* de uma *call* europeia em posição comprada é dado por (LO, 2018):

$$\text{Payoff em posição comprada} = \begin{cases} S(T) - K, & \text{se } S(T) > K \\ 0 & \text{se } S(T) \leq K \end{cases} \quad (1)$$

Figura 1 – *Payoff* de uma *call* europeia em posição comprada



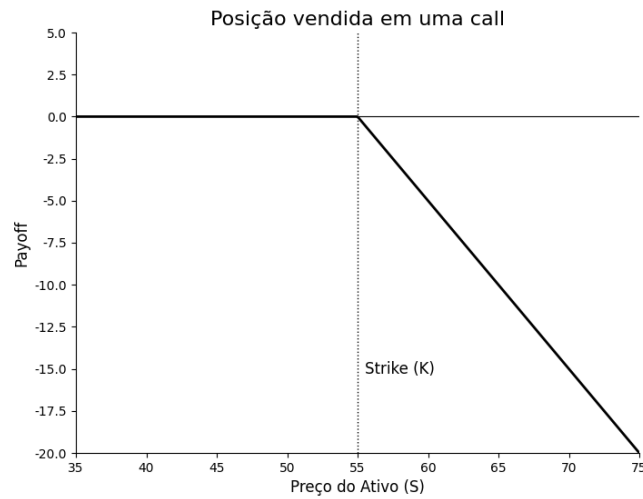
Fonte: Autoria própria.



O cálculo do *payoff* de uma *call* europeia em posição vendida é dado por (LO, 2018):

$$\text{Payoff em posição vendida} = \begin{cases} K - S(T), & \text{se } K < S(T) \\ 0 & \text{se } S(T) \leq K \end{cases} \quad (2)$$

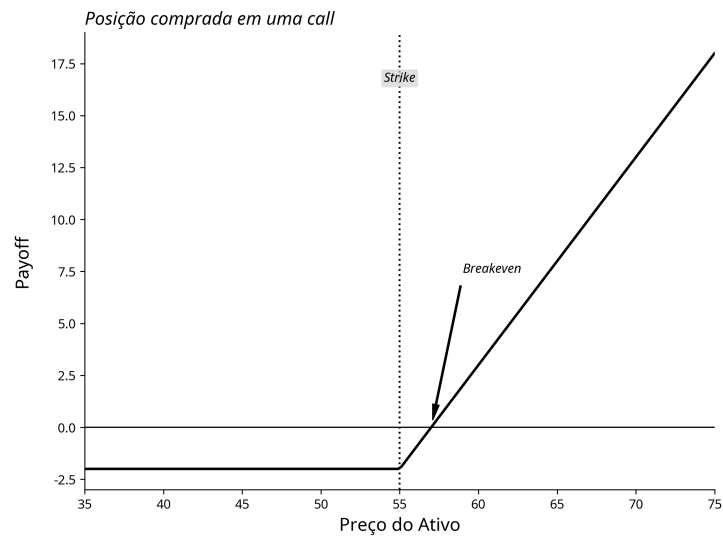
Figura 2 – *Payoff* de uma *call* europeia em posição vendida



Fonte: Autoria própria.

É importante ressaltar que o *payoff* não representa lucro ou prejuízo. Ele é apenas a diferença entre preço de exercício e preço do ativo. A relação de lucro e prejuízo leva em conta o prêmio da opção.

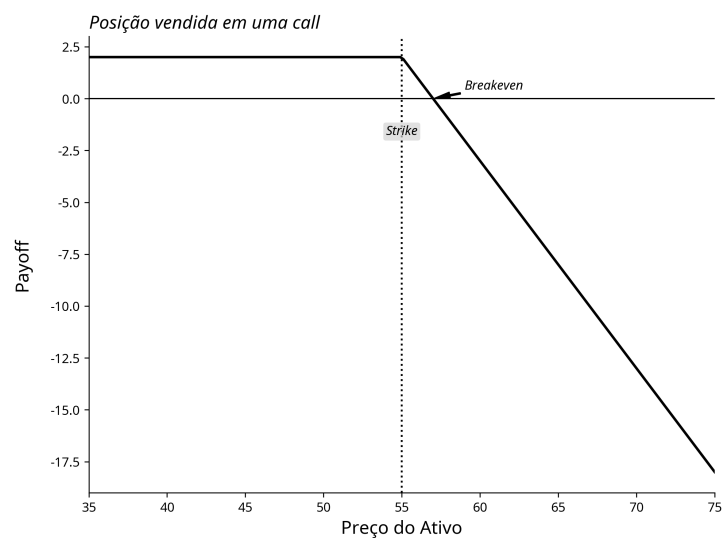
$$\text{Retorno em posição comprada} = \begin{cases} (S - K) - C, & \text{se vale a pena exercer} \\ -C & \text{se não vale a pena exercer} \end{cases} \quad (3)$$

Figura 3 – Retorno de uma *call* europeia em posição comprada

Fonte: Autoria própria.

$C$  é o valor pago pelas opções (prêmio da opção x número de opções compradas). Quem está na posição comprada tem um lucro potencialmente infinito e um prejuízo máximo igual a  $C$ .

$$\text{Retorno em posição vendida} = \begin{cases} C - (S - K), & \text{se o comprador exercer} \\ C & \text{se o comprador não exercer} \end{cases} \quad (4)$$

Figura 4 – Retorno de uma *call* europeia em posição vendida

Fonte: Autoria própria.

Quem está na posição vendida possui um lucro máximo igual a  $C$ , o prêmio que o

lançador recebe pelos contratos, mas possui um prejuízo de potencial infinito que acompanha o *payoff*.

## 2.2 BLACK-SCHOLES

A Equação (5) é a equação diferencial de Black-Scholes-Merton (Hull, 2022, p. 349), ela representa a evolução do preço de uma opção (representada por  $f$ ) a partir do preço do ativo ( $S$ ) e de outros fatores que interferem no preço.

$$\frac{\partial f}{\partial t} + rS \frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = rf \quad (5)$$

Ela possui diferentes soluções que dependem de que tipo de ativo está sendo representado por  $S$  (opções não são a única espécie de derivativo negociado). Cada ativo exige condições de contorno diferentes. Para uma *call* europeia elas são:

$$f = \max(S - K, 0) \quad \text{quando } t = T \quad (6)$$

O que essas condições impõem é que na data do vencimento ( $t = T$ ) se o preço da ação ( $S$ ) for igual ou superior ao *strike* ( $K$ ) a opção vale 0, virou pó.

A solução da equação para as condições de contorno citadas é expressa da seguinte maneira (Hull, 2022, p. 352):

$$c = S_0 N(d_1) - K e^{-rT} N(d_2) \quad (7)$$

Onde:

$$d_1 = \frac{\ln(S_0/K) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} \quad (8)$$

$$d_2 = \frac{\ln(S_0/K) + (r - \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T} \quad (9)$$

- $c$ : preço da *call*,
- $S_0$ : preço do ativo em  $T=0$ ,
- $K$ : preço de *strike* da opção,
- $r$ : taxa de juros livre de risco,
- $T$ : tempo restante até a opção expirar (em anos),
- $N(d)$ : função de probabilidade acumulada,
- $\sigma$ : volatilidade do ativo.

A fórmula de Black-Scholes deriva o preço de uma *call* a partir de dois termos:  $S_0 N(d_1)$  que contribui positivamente para o valor e  $[-K e^{(-rT)} N(d_2)]$  que reduz o valor. Ambos os termos estão associados a funções de distribuição Gaussiana acumulada, entretanto,  $N(d_1)$  e  $N(d_2)$  não representam a mesma ideia.  $N(d_2)$  representa  $P(S_T > K)$ , o que é fundamental para a execução de uma *call*, caso contrário a *call* não teria valor, seu *payoff* seria zero. Pode-se dizer então que  $N(d_2)$  representa a probabilidade de uma *call* ser executada. O outro termo associado a  $K$  é  $e^{(-rT)}$ , o fator de valor presente que ajusta o valor de  $K$  para  $T = 0$ . Multiplicando todos esses termos obtemos o valor presente do *strike* ajustado para a probabilidade da *call* realmente ser exercida no mundo neutro de risco.

$N(d_1)$  representa o delta da opção, o impacto causado pela variação do preço do ativo no preço da *call*.

$$N(d_1) = \Delta = \frac{\partial c}{\partial S_0} \quad (10)$$

O delta é um elemento crucial no modelo de Black-Scholes. O modelo assume que o investidor toma medidas (*hedging* dinâmico) para compensar variações no valor de delta.

Se para uma determinada *call*:  $\Delta = N(d_1) = 0,5$ . Isso significa que uma variação de R\$ 1,00 no preço do ativo causará uma variação de R\$ 0,50 no preço da *call*. De maneira simples,  $N(d_1)$  mede quanto da opção se comporta como o ativo.  $S_0 N(d_1)$  então representa o preço do ativo em  $T = 0$ .

Como ressaltado pelos próprios criadores da fórmula, a aplicabilidade do modelo parte de assumir condições ideais para o mercado, para o ativo e para a opção (Black; Scholes, 1973):

- A taxa de juros de curto prazo é conhecida e é constante ao longo do tempo.
- O preço da ação segue um caminho aleatório em tempo contínuo, com taxa de variância proporcional ao quadrado do preço da ação. Desta forma, a distribuição de possíveis preços no fim de um intervalo finito é log-normal. A taxa de variância de retorno sobre a ação é constante.
- A ação não paga dividendos ou outras distribuições.
- A opção é do tipo europeia, isto é, só pode ser exercida no vencimento.
- Não existem custos de transação ao comprar ou vender a ação ou a opção.
- É possível emprestar qualquer fração do preço de um título para comprá-lo ou mantê-lo, à taxa de juro de curto prazo.
- Não existem penalidades para venda a descoberto. Um vendedor que não possui o ativo pode simplesmente aceitar o preço oferecido por um comprador e combinar liquidar a operação numa data futura, pagando ao comprador um valor igual ao preço do ativo naquela data.

Um modelo matemático adota determinadas premissas para desenvolver seus argumentos, contudo, as premissas adotadas pela fórmula de Black-Scholes muitas vezes dependem de simplificações consideráveis da dinâmica do mercado financeiro.

Os termos  $d_1$  e  $d_2$  dependem da volatilidade do ativo ( $\sigma$ ), e o modelo assume que seu valor é constante no decorrer do tempo, na realidade essa volatilidade varia constantemente: desastres naturais, crises econômicas, eventos políticos são alguns dos fatores que impactam a volatilidade. E mesmo sem grandes eventos a volatilidade sofre variações.

Existem custos de transação ao comprar ou vender ações ou opções, as corretoras cobram para realizar o trabalho de corretagem e os governos podem impor tributos nessas transações. Esses custos são chamados de emolumentos, o quanto é cobrado depende do tipo de serviço (compra e venda de ações, execução de opções, cotas de fundos de investimento imobiliário), do volume da transação (quanto maior o volume maior a alíquota), do valor do produto e de impostos como PIS, COFINS etc (B3, 2025).

O modelo prevê que o preço do ativo se comporta de maneira contínua, mas na realidade o preço varia em saltos, de alta ou de baixa. O preço de uma ação pode sofrer uma variação abrupta entre o fechamento do mercado e a sua abertura no dia seguinte.

Apesar de ser um marco teórico nas Finanças Quantitativas, as inconsistências do modelo de Black-Scholes o tornam um modelo limitado para aplicações reais, especialmente em mercados voláteis e fricções expressivas. Essas limitações motivam a busca por modelos mais consistentes e aplicáveis.

## 2.3 SIMULAÇÃO DE MONTE CARLO

O método de Monte Carlo surge nos laboratórios de Los Alamos (Metropolis; Ulam, 1949), desenvolvido pelos cientistas John Von Neumann e Stanislaw Ulam como uma maneira de trabalhar problemas de Física Nuclear complexos demais para serem resolvidos analiticamente.

O método consiste em associar um número aleatório para uma variável e gerar uma simulação a partir disso. Uma única simulação está totalmente sujeita ao acaso, não é uma informação útil. Entretanto, quando geramos muitas simulações é possível identificar tendências, caso existam, e se as tendências desse sistema se comportam como a de algum outro conhecido na Física ou na Matemática.

### 2.3.1 Lei dos Grandes Números

O princípio que fundamenta o método de Monte Carlo é a Lei dos Grandes Números (LGN). Segundo a LGN, à medida em que o número de repetições de um dado experimento aumenta, a média dos resultados tende ao valor esperado (esperança) (Glasserman, 2004, p.1).

Seja  $x_1, x_2, \dots, x_n$  uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com  $E[x_i] = \theta$ , a média amostral é:

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (11)$$

A LGN afirma que:

$$\bar{X}_n \longrightarrow \theta$$

quando

$$n \longrightarrow \infty \quad (12)$$

A média amostral converge para a esperança  $\theta$  à medida que  $n$  cresce. Na prática procura-se usar um  $n$  na ordem dos milhares para garantir a precisão do experimento. A base para a aplicação do método de Monte Carlo em precificação de opções é que o valor esperado  $\theta$  pode representar o preço de um derivativo (Glasserman, 2004, p. 3).

Ao optar por usar este método, não é mais necessário descrever o sistema estudado através de equações diferenciais. É necessário, no entanto, achar uma descrição que se baseia em funções de densidade de probabilidades.

### 2.3.2 Regressão à média

Existem maneiras de descrever o sistema como o Processo de Wiener (Movimento Browniano), o Modelo Binomial (Cox; Ross; Rubinstein, 1979). Neste trabalho o modelo utilizado será o de regressão à média.

Usando este modelo tomamos como premissa que o preço do ativo subjacente está sujeito a um processo de regressão à média. Regressão à média é um fenômeno estatístico que prevê que logo após um resultado extremo é esperado um resultado mais próximo da média histórica do sistema. Por exemplo, se um jogador de futebol com uma média de 1 gol por partida marca 4 gols em um determinado jogo, é esperado que na próxima partida ele tenha um rendimento mais próximo da média histórica.

Esse modelo é extremamente valioso para processos aleatórios que podem sofrer variações bruscas no decorrer do tempo. O preço de uma ação pode despencar logo após um escândalo de corrupção corporativa, entretanto, é natural que depois de algumas semanas ele novamente tenda a sua média histórica. Como o preço de uma opção é diretamente ligado ao preço do ativo, o modelo de regressão à média se apresenta como uma opção valiosa para filtrar os saltos momentâneos do mercado.

O preço de um ativo que segue um processo de regressão à média é dado pela seguinte equação:

$$dS = -\varphi(S_t - \mu)dt + \sigma dz_t \quad (13)$$

- $\varphi$ : velocidade de regressão à média;
- $\mu$ : média histórica;
- $\sigma$ : volatilidade;
- $z_t$ : variável normal padronizada (média=0 e desvio padrão=1).

Para  $\Delta t \rightarrow 0$ , a equação toma a seguinte forma:

$$S_{t+\Delta t} = S_t - \varphi(S_t - \mu)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}z_t \quad (14)$$

A simulação de Monte Carlo opera sobre a variável  $z_t$  gerando valores aleatórios para ela. Considere-se o seguinte exemplo: volatilidade de 20% ao ano, média histórica de 29 BRL, preço do ativo em  $t = 0$  de 31 BRL, velocidade de regressão de 100% ao ano e uma taxa de juros livre de risco de 14% ao ano. O cálculo do preço do ativo será feito a partir da seguinte matriz de variáveis  $z_t$ :

Tabela 2 – Variáveis  $z_t$  sorteadas

Dias	Trajectoria 1	Trajectoria 2	Trajectoria 3
1	0.315765	-0.308067	-1.05674
2	-0.311268	-0.93118	-0.614181
3	0.702916	0.728974	-1.39382
4	0.149069	-1.53755	-0.343317

Fonte: Autoria própria.

O preço do ativo na Trajetória 1 para o primeiro dia é calculado da seguinte maneira:

$$S_{1,1} = 31 - 1(31 - 29)\frac{1}{252} + 0,20\sqrt{\frac{1}{252}}(0,315765) = 31,3889 \quad (15)$$

O salto de um dia foi representado como  $\frac{1}{252}$ , isso se deve ao fato de que as taxas de juros no Brasil são calculadas para um ano de 252 dias, apenas os dias úteis são contados (B3, 2025). Para o segundo dia:

$$S_{2,1} = 31,3889 - 1(31,3889 - 29)\frac{1}{252} + 0,20\sqrt{\frac{1}{252}}(-0,311268) = 30,9882 \quad (16)$$

E o processo se repete até que as Trajetórias tenham sido calculadas para todos os dias, como se pode ver na tabela seguinte:

Tabela 3 – Trajetórias do preço do ativo (*spot*)

Dias	Trajetória 1	Trajetória 2	Trajetória 3
0	31	31	31
1	31.3899	30.6039	29.6607
2	30.9882	29.4244	28.8843
3	31.8659	30.3411	27.1287
4	32.0424	28.3987	26.7036

Fonte: Autoria própria.

Até então apenas calculou-se o preço do ativo, como esses dados determinam o valor da opção?

Tomando como base uma *call* com *strike* de 28 BRL e assumindo que as três trajetórias são equiprováveis, o *payoff* de cada trajetória é:

Tabela 4 – *Payoff* de cada trajetória

	Trajetória 1	Trajetória 2	Trajetória 3
<i>Payoff</i> (BRL)	4,0424	0,3987	0

Fonte: Autoria própria.

A média aritmética dos *payoffs* é 1,4803 BRL. Esse, no entanto, é o valor da opção na data de vencimento. É necessário levar em conta o desgaste inflacionário e ajustar a média para o presente ( $t = 0$ ):

$$\text{Valor Futuro} = (\text{Valor Presente}).e^{rT} \quad (17)$$

$$\text{Valor Presente} = \frac{1,4803}{e^{0,14.(4/252)}} \quad (18)$$

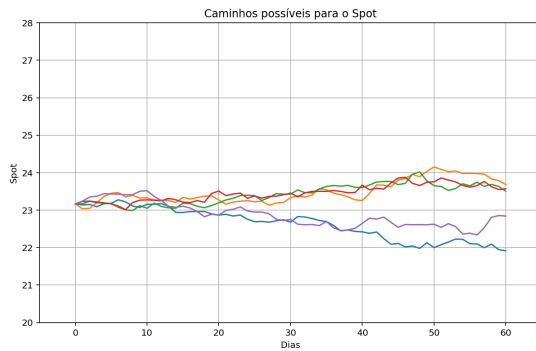
$$\text{Valor Presente} = 1,477 \text{ BRL} \quad (19)$$

O Valor Presente representa o prêmio da opção. Neste exemplo, considerou-se um período de apenas 4 dias, então a diferença entre o Valor Presente e o Valor Futuro não é expressiva, em períodos maiores a diferença é mais relevante.

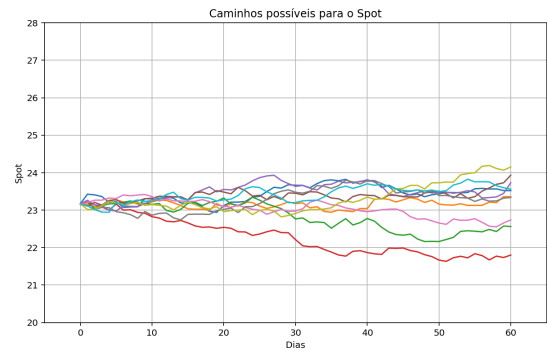
Uma representação usual desse processo é através de gráficos que contém os caminhos simulados:



Figura 5 – Caminhos para 5 simulações e 10 simulações



(a) 5 caminhos

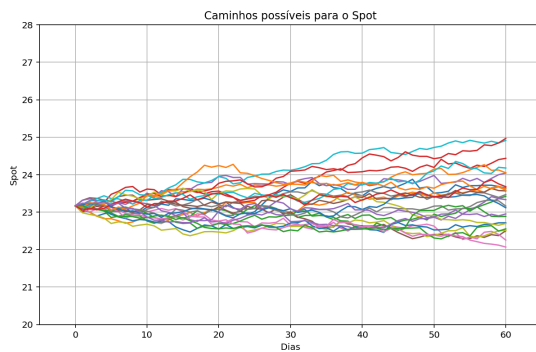


(b) 10 caminhos

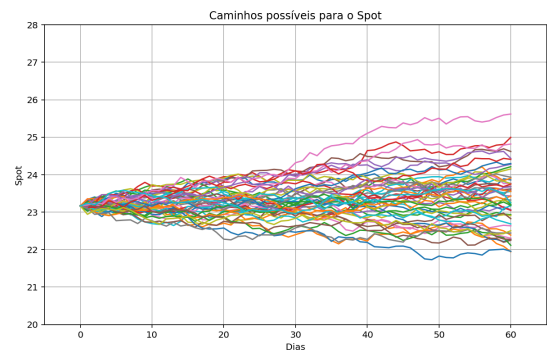
Fonte: Autoria própria.

Com poucas simulações os resultados são dispersos, não é possível extrair muitas informações sobre o comportamento do sistema.

Figura 6 – Caminhos para 25 simulações e 50 simulações



(a) 25 caminhos

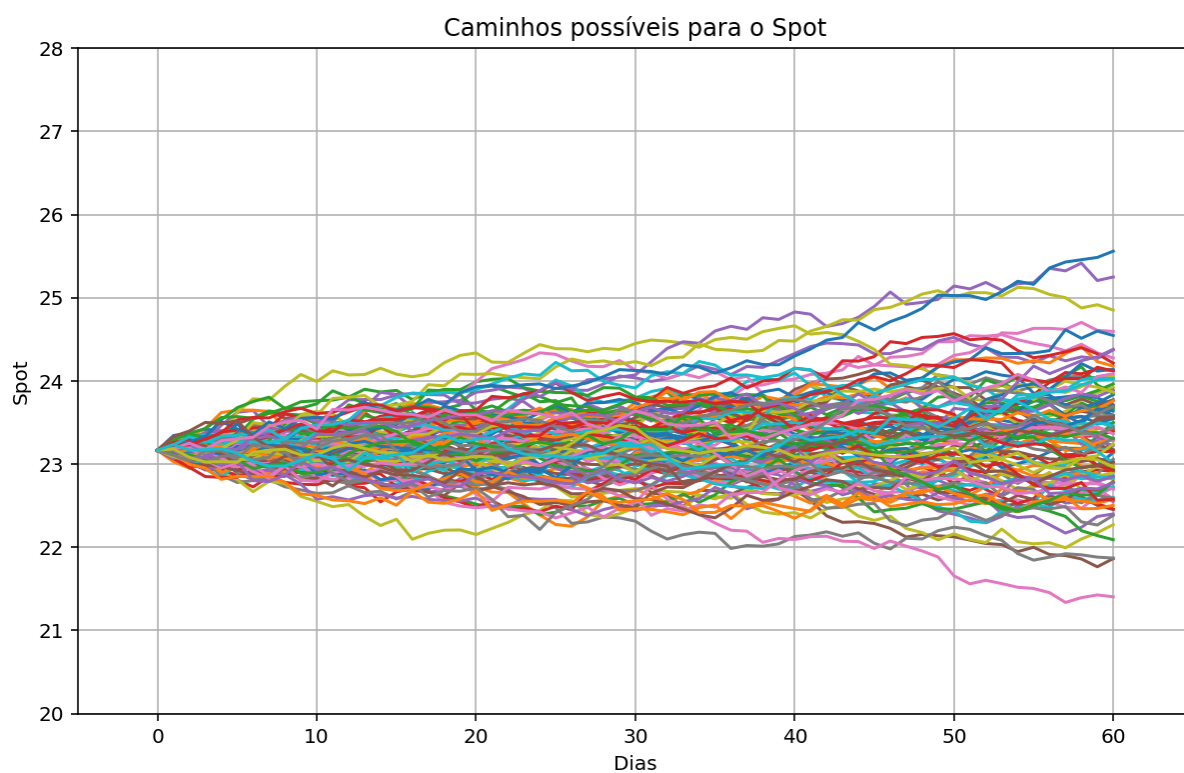


(b) 50 caminhos

Fonte: Autoria própria.

Quando aumentamos a quantidade de caminhos é possível perceber a concentração de resultados em uma determinada região.

Figura 7 – Caminhos para 100 simulações



Fonte: Autoria própria.

Com 100 simulações a concentração de resultados em uma determinada área fica ainda mais evidente, a quantidade de caminhos se sobrepondo já não torna viável uma avaliação visual do comportamento do sistema.

### 3 METODOLOGIA

#### 3.1 DADOS

Para este trabalho se usou o preço das opções de compra sobre as ações preferenciais da Petrobras, registradas na B3 com o código de negociação PETR4. Esses preços foram usados como linha de base para determinar a efetividade da simulação. As cotações podem ser encontradas no site *Yahoo Finance*. O intervalo de tempo analisado foi de 19/01/2023 a 18/04/2023.

Não existe apenas um contrato de opção para PETR4. Os investidores lançam diversos contratos e estes são codificados da seguinte maneira:

$$\text{PETR}+\text{X}+\text{YYY}$$

Onde PETR é o prefixo da ação sobre a qual a opção se baseia, X é uma letra que representa o mês de vencimento do contrato e YYY é um número atribuído pela B3 a uma série que identifica aquele contrato. É comum que esses dígitos YYY representem o Strike da opção, entretanto esta não é uma regra e os contratos que foram utilizados neste trabalho demonstram isso. O dígito X, todavia, respeita um padrão internacional.

Tabela 5 – Código internacional para o mês de vencimento

Vencimento	Call	Put
Janeiro	A	M
Fevereiro	B	N
Março	C	O
Abril	D	P
Maio	E	Q
Junho	F	R
Julho	G	S
Agosto	H	T
Setembro	I	U
Outubro	J	V
Novembro	K	W
Dezembro	L	X

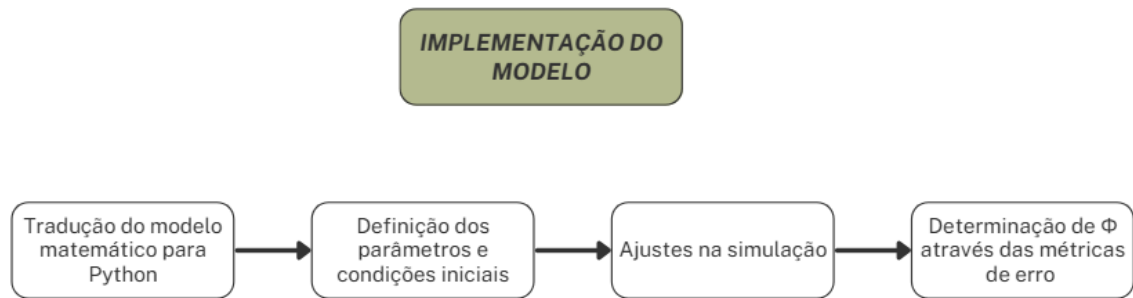
Fonte: B3.

Apesar de ser o modelo proposto para codificar os contratos, não existe uma uniformidade entre os códigos. Para alguns contratos os dígitos YYY representam o *strike* da opção. As séries de preço analisadas nesse trabalho não possuem esta característica.

#### 3.2 IMPLEMENTAÇÃO DO MODELO

O modelo apresentado na equação (14) foi implementado em Python 3 e seguiu os passos apresentados na imagem:

Figura 8 – Procedimentos Metodológicos



Fonte: Autoria própria.

O primeiro passo foi escrever a equação em Python. A equação foi inserida dentro de um laço `for`, já que cada simulação é um "caminho" ( $S_i$  depende de  $S_{i-1}$ ), para armazenar os valores calculados e operar novamente sobre eles no próximo passo. Os dados foram armazenados em uma planilha da qual o código acessava através da função `textpd.read_excel()`. Os dados foram organizados em uma matriz que era atualizada a cada operação da Equação (14).

O segundo passo foi determinar os parâmetros para os quais a equação iria calcular.

- Para o número de dias  $T$  foi usado a quantidade de dias até o vencimento da opção,  $T = 62$  dias.
- Para  $\varphi$ , a princípio testou-se alguns valores apenas para ver o comportamento do gráfico. Os valores mais precisos de  $\varphi$  eram alvo do estudo.
- Para  $\mu$ , a média histórica foi calculada a partir dos dados usando a função `np.mean()`.
- Para  $\sigma$ , a volatilidade foi calculada a partir dos dados usando a função `np.std()`.
- Para  $r$ , usou-se a taxa de juros da época,  $r = 0,1375$  (SELIC de 13,75% a.a.).
- Para  $\Delta t$ , esse elemento representa o passo da equação, a unidade de atualização temporal do sistema. No mundo financeiro esse valor é de  $\frac{1}{252}$ , um dia do ano comercial.
- Foram realizadas o total de 30 simulações.

O terceiro passo foi analisar as simulações preliminares e fazer ajustes que tornassem o modelo mais adequado ao mundo real.

Outra consideração foi o caso de *payoffs* negativos, que ocorrem quando o valor da ação é menor que o valor do *strike* ( $S - K < 0$ ). No mundo real ninguém optaria por executar uma opção cujo *strike* estivesse maior que o preço atual. Usou-se a função `np.maximum()` para limitar o valor do *payoff* a 0.

O quarto passo foi determinar valores de  $\varphi$  que minimizassem o erro da simulação. As métricas utilizadas estão descritas na próxima seção.

### 3.3 MÉTRICAS DE ERRO

O método usado para determinar a confiabilidade da simulação de Monte Carlo e sua possível superioridade em relação ao modelo de Black-Scholes será a análise de erro dos dois modelos. As métricas usadas neste trabalho serão o MAE, o MSE e o MAPE.

#### 3.3.1 MAE

O MAE (*Mean Absolute Error*) é uma métrica de erro que informa a magnitude do erro entre a previsão do modelo ( $\hat{y}_i$ ) e os resultados legítimos ( $y_i$ ). O módulo garante que os valores sempre são positivos, mesmo para  $\hat{y}_i > y_i$ . Quanto mais próximo de 0 for o valor do MAE, mais preciso o modelo.

$$MAE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |y_i - \hat{y}_i| \quad (20)$$

#### 3.3.2 MSE

O MSE (*Mean Squared Error*) é uma métrica de erro que informa o quadrado da diferença entre o resultado legítimo ( $y_i$ ) e a previsão do modelo ( $\hat{y}_i$ ). Por ser elevado ao quadrado o resultado será sempre positivo e a medida será mais sensível a grandes variações. Assim como o MAE, quanto mais próximo de 0 for o valor, mais preciso o modelo.

$$MSE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 \quad (21)$$

#### 3.3.3 MAPE

O MAPE (*Mean Absolute Percentage Error*) informa a diferença entre o resultado legítimo ( $y_i$ ) e a previsão do modelo ( $\hat{y}_i$ ) dividida pelo valor legítimo. Essa métrica nos informa a quantos % do valor legítimo a medida está. Assim como MAE e MSE, quanto mais próximo de 0 for o valor, mais preciso será o modelo.

$$MAPE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left| \frac{y_i - \hat{y}_i}{y_i} \right| \quad (22)$$

## 4 RESULTADOS

Os resultados discutidos nessa seção foram obtidos através da implementação em Python dos métodos citados na Seção 3. Analisou-se 11 séries de preços com maior volume de negociação das *calls* PETRD (vencimento em abril de 2023). Nas tabelas, as melhores métricas foram destacadas em negrito.

### 4.1 BLACK-SCHOLES

Tabela 6 – Erros estatísticos do modelo de Black-Scholes

PETRD	K(BRL)	MAE	MSE	MAPE
291	28,26	14,744	217,40	211,56
222	26,76	14,370	206,49	20,238
266	27,76	14,735	217,12	87,506
271	27,76	14,607	213,35	38,063
220	26,26	14,024	196,68	11,930
227	25,26	13,188	173,92	4,8318
202	25,76	13,630	185,78	7,6108
194	23,76	12,019	144,46	<b>0,6239</b>
183	24,76	12,757	162,73	2,9699
198	22,76	11,219	125,86	1,2677
122	22,26	<b>10,796</b>	<b>116,55</b>	2,1239

Fonte: Autoria própria.

Os dados apresentados na tabela mostram os valores das métricas de erro para os resultados da solução analítica do modelo de Black-Scholes. Enfatiza-se em especial os valores do MSE, uma vez que ele pune mais gravemente valores atípicos. Grandes discrepâncias são perigosas, pois podem indicar janelas de arbitragem que expõem os operadores a perdas financeiras significativas. A *call* PETRD122 (K=22,26 BRL) apresentou o melhor MSE (116,55).

Tanto os valores do MAE e do MSE são bastante elevados, essa discrepância já era esperada já que as limitações do modelo de Black-Scholes desviam suas previsões dos resultados reais.

Esses valores serviram de base de comparação para os resultados obtidos através da simulação de Monte Carlo.

### 4.2 SIMULAÇÃO DE MONTE CARLO

Pela simulação de Monte Carlo a opção PETRD291 (K=22,26 BRL) apresentou o melhor MSE (0,00002). Destacam-se também as opções PETRD271 (K=27,76 BRL) e PETRD198 (K=22,76 BRL) que apresentaram valores na quinta ordem decimal,  $9 \times 10^{-5}$  e  $8 \times 10^{-5}$ , respectivamente.

Tabela 7 – Erros estatísticos do simulação de Métricas de erro do modelo MC

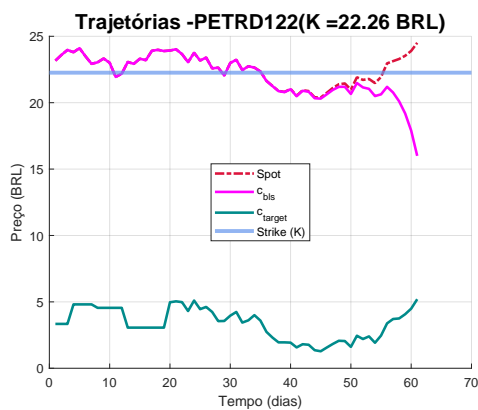
PETRD	K(BRL)	MAE	MSE	MAPE
291	28,26	<b>0,0049</b>	<b>0,00002</b>	0,1173
222	26,76	0,0313	0,0009	0,0718
266	27,76	0,0243	0,0005	0,0300
271	27,76	0,0095	0,00009	0,0321
220	26,26	0,0641	0,0041	<b>0,0085</b>
227	25,26	0,0363	0,0013	0,1806
202	25,76	0,0298	0,0008	0,0199
194	23,76	0,0594	0,0035	2,1668
183	24,76	0,0285	0,0008	1,1600
198	22,76	0,0093	0,00008	3,3432
122	22,26	0,0144	0,0002	3,9297

Fonte: Autoria própria.

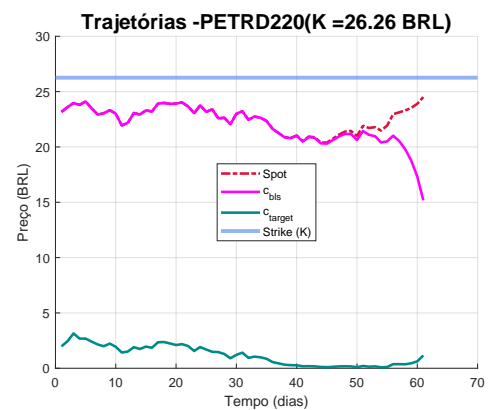
É possível ver uma grande disparidade nas métricas de erro da simulação de Monte Carlo para o modelo clássico de Black-Scholes. Até mesmo o pior resultado com Monte Carlo, para a opção PETRD220 (MSE de 0,0041), é muito superior ao melhor resultado da solução usando Black-Scholes, PETRD122 (MSE de 116,55). Os resultados próximos de zero indicam que o modelo é confiável.

A seguir os gráficos das opções citadas, a linha pontilhada vermelha representa a evolução do *spot*, a linha rosa ( $c_{bls}$ ) representa o preço previsto pela solução de Black-Scholes, a linha ciano ( $c_{target}$ ) representa o custo real da opção, a linha estacionária azul ( $K$ ) representa o *strike* de cada contrato.

Figura 9 – Gráficos das opções PETRD122 e PETRD220



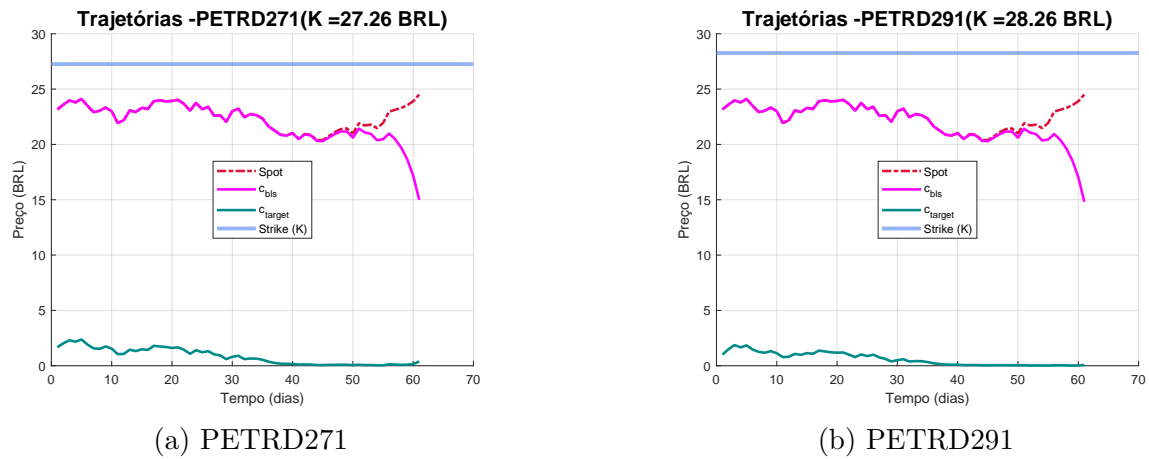
(a) PETRD122



(b) PETRD220

Fonte: Autoria própria.

Figura 10 – Gráficos das opções PETRD271 e PETRD291



Fonte: Autoria própria.

### 4.3 VELOCIDADE DE REGRESSÃO

As métricas de erro variam de acordo com a velocidade de regressão ( $\varphi$ ) adotada, as métricas de erro apresentadas anteriormente foram os melhores valores encontrados e para cada um desses melhores valores existe também um  $\varphi$  associado.

Tabela 8 – Valores de  $\varphi$  que otimizam o MSE

PETRD	MSE	$\varphi_{\text{ótimo}}$
291	0,00002	-8,00
222	0,0009	-8,33
266	0,0005	-7,83
271	0,00009	-8,17
220	0,0041	-7,67
227	0,0013	-8,67
202	0,0008	-9,00
194	0,0035	-9,17
183	0,0008	-9,00
198	0,00008	-8,67
122	0,0002	-8,67

Fonte: Autoria própria.



Tabela 9 – Valores de  $\varphi$  que otimizam o MAPE

PETRD	MAPE	$\varphi_{\text{ótimo}}$
291	0,1173	-7,83
222	0,0718	-8,00
266	0,0300	-6,83
271	0,0321	-7,17
220	0,0085	-8,83
227	0,1806	-10,00
202	0,0199	-9,83
194	2,1668	-10,00
183	1,1600	-9,83
198	3,3432	-10,00
122	3,9297	-10,00

Fonte: Autoria própria.

Os valores de  $\varphi$  que otimizaram o MSE tiveram um valor médio de -8,47. Os valores de  $\varphi$  que otimizaram o MAPE tiveram um valor médio de -8,04, sem grandes disparidades entre as métricas. Isso significa que as opções possuíam uma taxa de regressão à média de aproximadamente 800% ao ano ( 20% ao mês). Esse valor é muito elevado e representa uma tendência retorno rápido a média.

## 5 CONCLUSÕES

O presente trabalho examinou a simulação de Monte Carlo para regressão à média, um método já descrito teoricamente, mas carente de trabalhos práticos que sustentem a sua efetividade. A partir dos resultados coletados, é possível fazer algumas afirmações:

- O modelo de Black-Scholes apresenta métricas de erro muito grandes quando aplicado em opções de compra reais.
- A simulação de Monte Carlo para regressão à média é capaz de prever com eficiência o comportamento de uma opção real.

Este trabalho, no entanto, possui algumas limitações que devem ser consideradas e servem de motivação para trabalhos futuros:

- O presente trabalho analisou apenas *calls* europeias, é necessário investigar se o método tem a mesma efetividade para determinar o comportamento de *puts*.
- As opções analisadas eram europeias (executáveis apenas no vencimento), seria interessante investigar a praticidade deste modelo para opções americanas (executáveis até o vencimento).
- Testar o método para tempos de vencimento maiores.

## REFERÊNCIAS

B3 - Brasil, Bolsa, Balcão. **Código de Liquidação das Opções do Mercado de Derivativos**. 2025. Disponível em: <https://www.b3.com.br/data/files/4B/F3/C4/10/519AC7109A21A9C78C094EA8/Formacao%20do%20Codigo%20de%20Liquidacao%20das%20Opcoes.pdf>. Acesso em: 05 nov. 2025

B3 - Brasil, Bolsa, Balcão. **Tarifas de Ações e Fundos de Investimento**. 2025. Disponível em: [https://www.b3.com.br/pt\\_br/produtos-e-servicos/tarifas/listados-a-vista-e-derivativos/renda-variavel/tarifas-de-acoes-e-fundos-de-investimento/a-vista/](https://www.b3.com.br/pt_br/produtos-e-servicos/tarifas/listados-a-vista-e-derivativos/renda-variavel/tarifas-de-acoes-e-fundos-de-investimento/a-vista/). Acesso em: 05 nov. 2025

B3 - Brasil, Bolsa, Balcão. **Taxas de Juros**. 2025. Disponível em: [https://www.b3.com.br/pt\\_br/produtos-e-servicos/negociacao/juros/s\\_di\\_train\\_prog/02-taxas-de-juros.htm](https://www.b3.com.br/pt_br/produtos-e-servicos/negociacao/juros/s_di_train_prog/02-taxas-de-juros.htm). Acesso em: 03 dez. 2025.

BLACK, F.; SCHOLES, M. The pricing of options and corporate liabilities. **The Journal of Political Economy**, v. 81, n. 3, p. 637–654, 1973. Disponível em: <https://doi.org/10.1086/260062>. Acesso em: 01 out. 2025.

CABRAL FILHO, H. **Modelos de simulação de Monte Carlo: aplicações ao cálculo do Value-at-Risk e à análise de opções de compra Europeias sem dividendo**. 64 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Engenharia de Produção) - Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2010. Disponível em: <http://repositorio.poli.ufrj.br/monografias/monopoli10000242.pdf> . Acesso em: 28 out. 2025.

COX, J. C.; ROSS, S. A.; RUBINSTEIN, M. Option pricing: A simplified approach. **Journal of Financial Economics**, v. 7, n. 3, p. 229–263, 1979. Disponível em: [https://doi.org/10.1016/0304-405X\(79\)90015-1](https://doi.org/10.1016/0304-405X(79)90015-1) . Acesso em: 01 dez. 2025.

DE LIMA ARAÚJO, F. B. Precificação de opções europeias via simulações de Monte Carlo no Octave. **Revista de Matemática da UFOP**, v. 1, 2024. Disponível em: <https://doi.org/10.5281/zenodo.10806284> . Acesso em: 28 out. 2025.

DE PAULA, R. **Método de Monte Carlo e Aplicações**. 83 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Federal Fluminense, Volta Redonda, 2014. Disponível em: <https://app.uff.br/riuff/bitstream/handle/1/4180/>

RenatoRicardoDePaula%202014-2.PDF?sequence=1&isAllowed=y . Acesso em: 28 out. 2025.

DE SOUZA SANTOS, D. **Resolução da equação de Black-Scholes utilizando redes neurais**. 2024. Tese (Doutorado em Biometria e Estatística Aplicada) - Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, 2024. Disponível em: [https://www.ppgbea.ufrpe.br/sites/default/files/testes-dissertacoes/tesefinal\\_danielsouza.pdf](https://www.ppgbea.ufrpe.br/sites/default/files/testes-dissertacoes/tesefinal_danielsouza.pdf) . Acesso em: 20 nov. 2025.

EVERITT, B. S.; SKRONDAL, A. **The Cambridge dictionary of statistics**. 4. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2010.

FORTUNE, P. Anomalies in Option Pricing: The Black-Scholes Model Revisited. **New England Economic Review**, Boston, p. 17-40, 1996. Disponível em: <https://www.bostonfed.org/publications/new-england-economic-review/1996-issues/issue-march-april-1996/anomalies-in-option-pricing-the-black-scholes-model-revisited.aspx> . Acesso em: 21 out. 2025.

GLASSERMAN, P. **Monte Carlo methods in financial engineering**. Nova York: Springer, 2004. v. 53.

HAUG, E. G.; TALEB, N. N. **Why we have never used the Black-Scholes-Merton option pricing formula**. Social Science Research Network Working Paper Series, v. 1, n. 4, 2008. Disponível em: [https://www.researchgate.net/publication/255650680\\_Why\\_We\\_Have\\_Never\\_Used\\_the\\_Black-Scholes-Merton\\_Option\\_Pricing\\_Formula](https://www.researchgate.net/publication/255650680_Why_We_Have_Never_Used_the_Black-Scholes-Merton_Option_Pricing_Formula). Acesso em: 21 out. 2025.

HUANG, T.; XIAO, M.; WANG, Z. Control Variates in Option Pricing. **Science and Technology of Engineering, Chemistry and Environmental Protection**, Anaheim, v.2, n.10, 2024. Disponível em: <https://doi.org/10.61173/dwng4643>. Acesso em: 20 nov. 2025.

HULL, J. C. **Options, futures, and other derivatives**. 11. ed. Londres: Pearson Education, 2022.

JARROW, R. A.; CHATTERJEA, A. **An Introduction to Derivative Securities, Financial Markets, and Risk Management**. Singapura: World Scientific, 2024.

Disponível em: <https://www.studywithus.net/sample/269sample.pdf>. Acesso em: 23 nov. 2025.

LO, A. **Derivative pricing: A problem-based primer**. 1. ed. Nova Iorque: CRC Press. 2018.

METROPOLIS, N.; ULAM, S. The Monte Carlo method. **Journal of the American Statistical Association**, v. 44, n. 247, p. 335–341, 1949. Disponível em: <https://doi.org/10.1080/01621459.1949.10483310>. Acesso em: 28 out. 2025.

MERTON, R. C. Theory of Rational Option Pricing. **The Bell Journal of Economics and Management Science**, Santa Monica, v. 4, n. 1, p. 141-183, 1973. Disponível em: <https://doi.org/10.2307/3003143>. Acesso em: 20 nov. 2025.

MOLERO, L.; MELLO, E. **Derivativos: Negociação e precificação**. São Paulo: Saint Paul Editora, 2019.

OCC - Options Clearing Corporation. **Annual Volume and Open Interest Statistics**. 2025. Disponível em: <https://www.theocc.com/market-data/market-data-reports/volume-and-open-interest/historical-volume-statistics>. Acesso em: 07 nov. 2025.

PFÜTZENREUTER, E. **Investindo no Mercado de Opções**: Aprenda a operar opções na Bolsa de Valores com segurança e controle dos riscos. 2. ed. São Paulo: Novatec Editora, 2021.

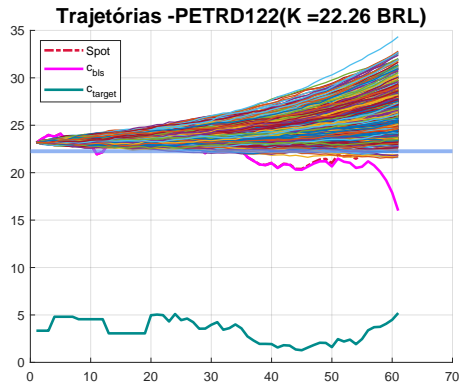
ROSS, S. M. **An elementary introduction to mathematical finance**. Cambridge: Cambridge University Press, 2011.

THE ROYAL SWEDISH ACADEMY OF SCIENCES. **The Prize in Economic Sciences 1997 – Press release**. 1997. Disponível em: <https://www.nobelprize.org/prizes/economic-sciences/1997/press-release/> Acesso em: 22 nov. 2025

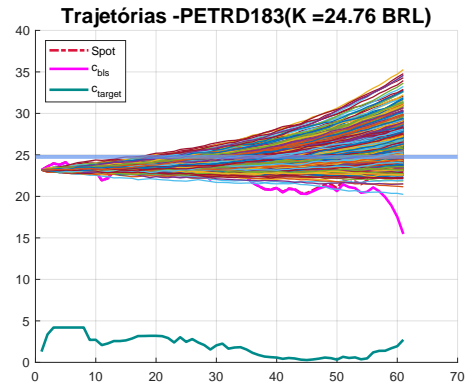
WILMOTT, P. **Derivatives: The Theory and Practice of Financial Engineering**. Chichester: John Wiley & Sons, 1998.

## APÊNDICE A – GRÁFICOS COM TRAJETÓRIAS

### Trajетórias das opções PETRD122 e PETRD183



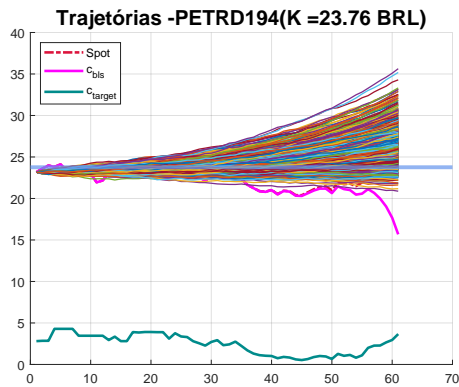
(a) PETRD122



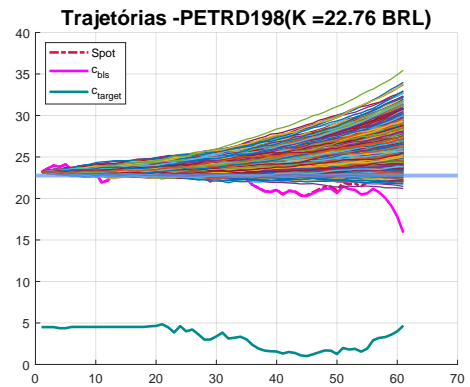
(b) PETRD183

Fonte: Autoria própria.

### Trajетórias das opções PETRD194 e PETRD198



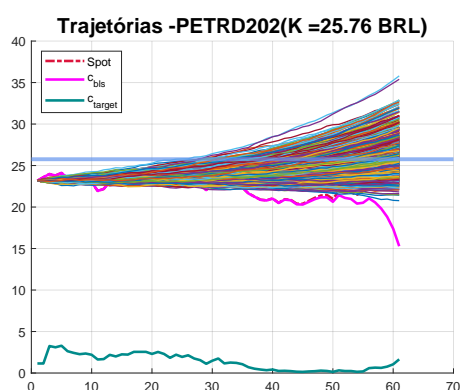
(a) PETRD194



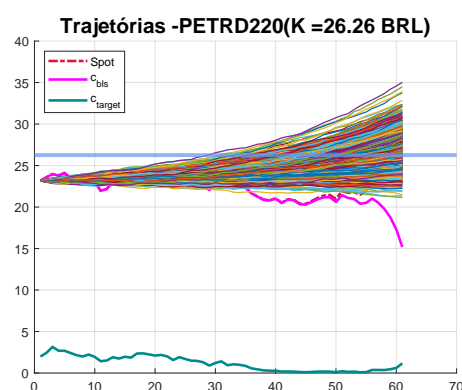
(b) PETRD198

Fonte: Autoria própria.

## Trajetórias das opções PETRD202 e PETRD220



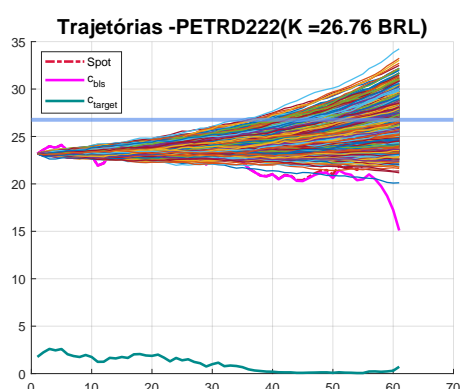
(a) PETRD202



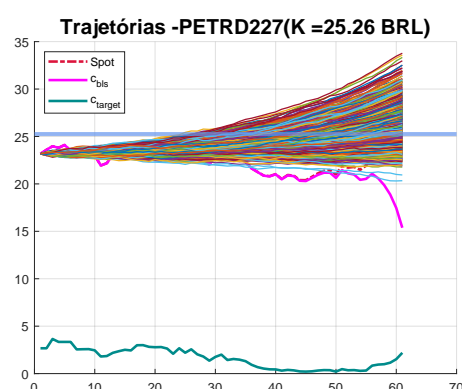
(b) PETRD220

Fonte: Autoria própria.

## Trajetórias das opções PETRD222 e PETRD227



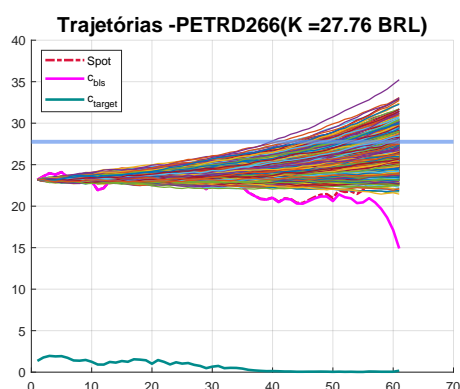
(a) PETRD222



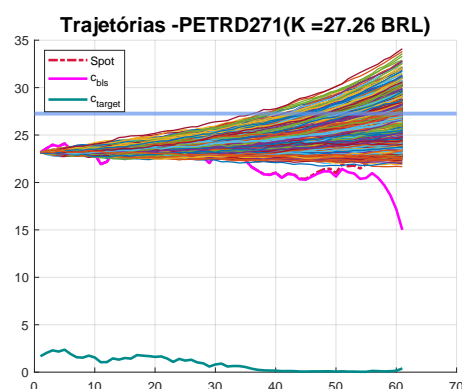
(b) PETRD227

Fonte: Autoria própria.

## Trajetórias das opções PETRD266 e PETRD271



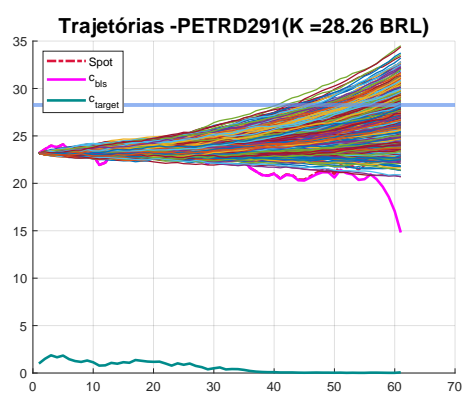
(a) PETRD266



(b) PETRD271

Fonte: Autoria própria.

## Trajetórias da opção PETRD291



(a) PETRD122

Fonte: Autoria própria.