



INSTITUTO FEDERAL DO SERTÃO PERNAMBUCANO
CAMPUS SERRA TALHADA
CURSO DE LICENCIATURA EM FÍSICA

Aline Gomes Diniz Carvalho

Estudo de oscilações com sensor ultrassônico e Arduino

Serra Talhada - PE

2026

Aline Gomes Diniz Carvalho

Estudo de oscilações com sensor ultrassônico e Arduino

Trabalho de Conclusão de Curso de Licenciatura em Física do Instituto Federal do Sertão Pernambucano campus Serra Talhada como requisito para a obtenção do título de Licenciado em Física.

Orientador: Prof. Dr. Emerson José Freitas da Silva

Serra Talhada - PE

2026

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

C331 Carvalho, Aline Gomes Diniz.

Estudo de oscilações com sensor ultrassônico e Arduino / Aline Gomes Diniz Carvalho. - Serra Talhada, 2026.
43 f. : il.

Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Física) -Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Sertão Pernambucano, Campus Serra Talhada, 2026.
Orientação: Prof. Dr. Emerson José Freitas da Silva.

1. Física. 2. Sistema massa-mola. 3. Pêndulo simples. 4. Arduino. I. Título.

CDD 530


Aline Gomes Diniz Carvalho

Estudo de oscilações com sensor ultrassônico e Arduino


Este Trabalho de Conclusão de Curso foi julgado adequado para obtenção do Título de “Licenciado em Física” e aprovado em sua forma final pelo Curso de Graduação em Licenciatura em Física.

Serra Talhada - PE, 20 de fevereiro de 2026.


Banca Examinadora:

Documento assinado digitalmente
 **EMERSON JOSE FREITAS DA SILVA**
Data: 21/02/2026 11:40:27-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>


Prof. Emerson José Freitas da Silva
Instituto Federal do Sertão Pernambucano

Documento assinado digitalmente
 **ALYSON JOSE ALVES CARVALHO**
Data: 21/02/2026 11:59:56-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Alyson Jose Alves Carvalho
Universidade Estadual da Paraíba

Documento assinado digitalmente
 **DANIEL DE SOUZA SANTOS**
Data: 21/02/2026 16:00:41-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Daniel de Souza Santos
Instituto Federal do Sertão Pernambucano

Documento assinado digitalmente
 **TIAGO EMANOEL MELO PEREIRA**
Data: 21/02/2026 12:18:51-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Tiago Emanuel Melo Pereira
Instituto Federal do Sertão Pernambucano

DEDICATÓRIA

Para o meu pai.

AGRADECIMENTOS

Agradeço à minha família, minha base de sempre.

Aos meus amigos do curso, que se tornaram amigos pra vida, por todo o apoio e incentivo nos momentos mais necessários.

Agradeço também a todos os professores que me formaram, ensinando muito além dos conteúdos de sala de aula.

Agradeço, em especial, aos professores Alyson, Daniel e Tiago pela gentileza em contribuir para a melhoria desse trabalho.

Por fim, deixo a minha sincera gratidão ao professor Emerson por não medir esforços para me conduzir nesse trabalho, me auxiliando em todos os momentos como um ótimo orientador e amigo.

RESUMO

Sistemas que apresentam oscilações periódicas são centrais para a compreensão de diversos fenômenos. Este trabalho buscou investigar experimentalmente dois sistemas mecânicos que descrevem o movimento oscilatório: o sistema massa-mola e o pêndulo simples, comparando os resultados obtidos com as previsões teóricas do Movimento Harmônico Simples (MHS). Para a aquisição de dados foi utilizado o dispositivo eletrônico Arduino, permitindo registrar posições ao longo do tempo. As análises incluíram o cálculo de períodos, frequências e constantes elásticas, além da aplicação da Transformada Rápida de Fourier (FFT) para identificar frequências dominantes e avaliar a presença de ruídos. Os resultados experimentais mostraram boa concordância com os valores teóricos, confirmando a validade do modelo do MHS, ao evidenciar, por exemplo, a influência de alguns parâmetros sobre o período e a frequência de oscilação, como massa e constante elástica para o sistema massa-mola, e comprimento no caso do pêndulo simples. Adicionalmente, a partir das medições do sistema pendular, foi possível estimar a aceleração da gravidade, com valores próximos ao esperado teoricamente. Este estudo demonstra que métodos experimentais, aliados a ferramentas eletrônicas acessíveis, permitem a verificação de modelos teóricos e fortalecem a compreensão de conceitos fundamentais em Física.

Palavras-chave: Sistema Massa-mola; Pêndulo Simples; Arduino.

ABSTRACT

Systems exhibiting periodic oscillations are central to understanding various phenomena. This work sought to experimentally investigate two mechanical systems that describe oscillatory motion: the mass-spring system and the simple pendulum, comparing the results obtained with the theoretical predictions of Simple Harmonic Motion (SHM). The Arduino electronic device was used for data acquisition, allowing the recording of positions over time. The analyses included the calculation of periods, frequencies, and spring constants, as well as the application of the Fast Fourier Transform (FFT) to identify dominant frequencies and assess the presence of noise. The experimental results showed good agreement with the theoretical values, confirming the validity of the SHM model, highlighting, for example, the influence of some parameters on the period and frequency of oscillation, such as mass and spring constant for the mass-spring system, and length in the case of the simple pendulum. Additionally, from the measurements of the pendulum system, it was possible to estimate the acceleration due to gravity, with values close to those theoretically expected. This study demonstrates that experimental methods, combined with accessible electronic tools, allow for the verification of theoretical models and strengthen the understanding of fundamental concepts in Physics.

Keywords: Mass-spring System; Simple Pendulum; Arduino

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	8
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	10
2.1	Sistema Massa-mola	10
2.1.1	Associações de molas	13
2.2	Pêndulo Simples	15
2.3	Movimento Harmônico Simples (MHS)	19
2.4	Arduino	20
2.5	Transformada de Fourier	21
3	METODOLOGIA	23
4	RESULTADOS E DISCUSSÕES	28
5	CONCLUSÃO	38
	REFERÊNCIAS	40
	APÊNDICE A - CÓDIGO DO ARDUINO	42

1 INTRODUÇÃO

O estudo de sistemas oscilatórios é de grande importância para a compreensão da natureza, pois diversos fenômenos se comportam como oscilações, ou seja, variam em torno de um ponto de equilíbrio. Muitos desses fenômenos são objeto de estudo da Física, como as oscilações presentes na análise de estabilidade mecânica, na propagação de calor, na emissão eletromagnética e no comportamento de sistemas quânticos, demonstrando como as oscilações são um pilar central da Física (BARROS et al., 2023).

Apesar das particularidades individuais, vários sistemas físicos que oscilam podem ser descritos pelas equações do Movimento Harmônico Simples (MHS), um tipo de movimento oscilatório simplificado que pode ser aplicado mesmo a sistemas que não seguem perfeitamente suas características, já que é possível aproximar muitos tipos de oscilação ao regime do MHS e assim estudá-los com equações já conhecidas. O pêndulo simples e o sistema massa-mola, objetos de estudo deste trabalho, são sistemas mecânicos clássicos do MHS.

Sendo um movimento essencial no estudo de oscilações é muito importante que o MHS seja capaz de descrever a natureza de maneira consistente, dentro das limitações impostas pelo modelo. Essa necessidade em descrever a natureza é uma das bases do método científico que consiste na proposição de hipóteses que precisam ser testadas para serem confirmadas ou rejeitadas, geralmente por meio de verificações experimentais. Embora tenha evoluído ao longo do tempo, a ideia central do método permanece, como enfatiza Richard Feynman: "não importa quão bela ou inteligente seja uma teoria; se não explica os resultados experimentais, ela está errada". Essa perspectiva evidencia a importância de confrontar modelos teóricos com os fenômenos que estes procuram descrever (SANTOS, 2018).

Além de caracterizar o fazer científico, a verificação experimental também é uma ferramenta valiosa no ensino de ciências, pois permite aos estudantes relacionar conceitos teóricos a fenômenos observáveis. Metodologias de ensino que incorporam a experimentação sempre são bem avaliadas por seus inúmeros benefícios. Takahashi e Cardoso (2012), por exemplo, evidenciam que a experimentação desenvolve capacidades de verificação de hipóteses, compreensão, simplificação e modelagem de problemas, formulação de hipóteses, elaboração de resultados, entre outros e a Base Nacional Comum Curricular, documento norteador da educação brasileira, também indica a importância de atividades experimentais, sobretudo realizadas pelos próprios estudantes, sob uma ótica investigativa, no contexto de Ciências da Natureza (BRASIL, 2018).

Aliado a esses benefícios e reforçando o uso do experimental está também o fato de que pêndulos e sistemas massa-mola são de grande facilidade de reprodução, inclusive com o uso de materiais de baixo custo. Uma barreira, no entanto, pode ser a captura dos dados, já que o uso apenas do cronômetro com ativação manual, técnica mais comum, se mostra limitada. Isso, porém, pode ser contornado com o uso de dispositivos eletrônicos que, diferente do senso comum,

podem ser adquiridos a preços acessíveis. Bonventi e Aranha (2015) apontam que o uso desses dispositivos facilita a obtenção e o tratamento matemático dos dados e a discussão de conceitos físicos, além de tornar os experimentos de Física mais dinâmicos em comparação com as técnicas tradicionais. Assim, esses autores realizam seu estudo do movimento oscilatório de um pêndulo físico utilizando um smartphone e os programas “Tracker” e *Qtiplot*. Também é possível verificar o uso de dispositivos eletrônicos em trabalhos como o de David, Dan e Rodrigues (2022) que utilizam o Arduino, dispositivo compatível com sensores, para obter os dados de um pêndulo físico e realizam cálculos para a obtenção, por exemplo, da frequência de oscilação por meio da Transformada Rápida de Fourier (FFT). Dias (2023) utilizou além do Arduino a ferramenta eletrônica Phyphox para obter os parâmetros de um pêndulo simples e conduziu uma sequência investigativa com alunos do Ensino Fundamental e Médio. Já Conceição, Leyva-Cruz e Miltão (2020) afirmam que a automação do experimento pode minimizar a influência das fontes de erros nas medidas e utilizam o Arduino e um sensor ultrassônico modelo HC-SR04 como mecanismo de medição dos parâmetros da oscilação de um sistema massa-mola vertical.

O desenvolvimento de experimentos a partir de modelos teóricos pode enfrentar desafios com a impossibilidade de reproduzir certas condições impostas pela teoria, como um pêndulo que só oscila com pequenas amplitudes ou um sistema massa-mola constituído por uma mola ideal, e ambos os sistemas oscilando sem haver atrito e resistência do ar. Além destas condições não atendidas, pode haver erros advindos do sensor e erros humanos, como a medição incorreta do tamanho do pêndulo e da mola. Todas essas situações vão gerar pequenas disparidades entre os dados experimentais e teóricos, mas que não serão significativas a ponto de invalidar a teoria para os casos estudados. Assim, ainda é possível usar experimentos para avaliar a coerência das teorias que os baseiam.

Esse é objetivo desse trabalho: reproduzir experimentalmente um sistema massa-mola e um pêndulo simples, obter dados acerca de seus movimentos utilizando um dispositivo eletrônico, o Arduino, e analisar tais dados, tratando-os através de técnicas matemáticas como a FFT. Além disso, os mesmos parâmetros serão obtidos utilizando equações advindas das teorias, permitindo confrontar os resultados dos dois métodos a fim de verificar a validade dos modelos teóricos.

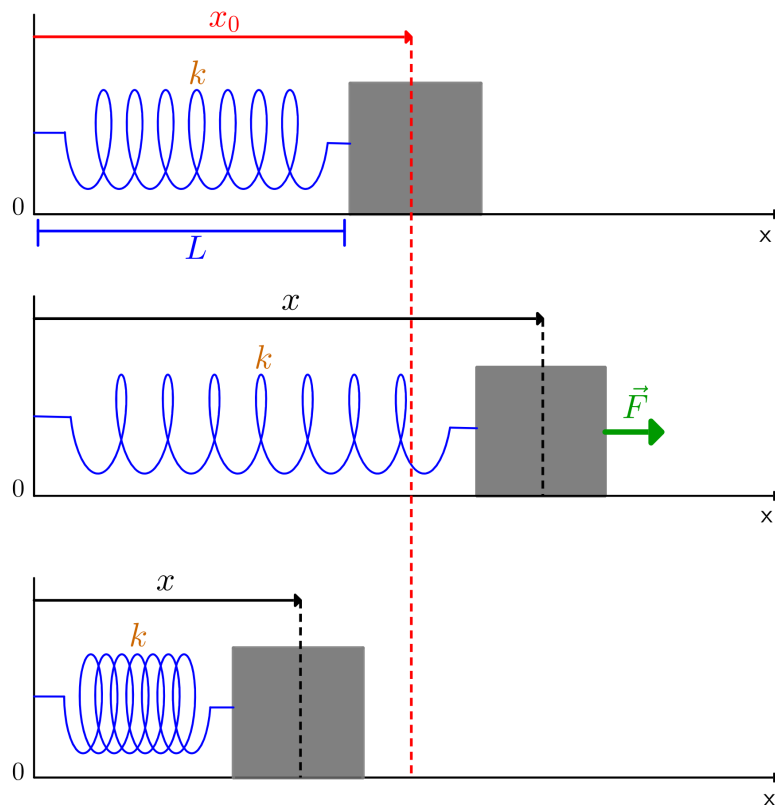
Este trabalho está estruturado em capítulos. Além dessa introdução, há o capítulo dois que apresenta a fundamentação teórica, abordando os principais conceitos, autores e fundamentos que sustentam o trabalho. O terceiro capítulo descreve os procedimentos metodológicos adotados, incluindo os métodos de coleta e análise de dados. No quarto capítulo são apresentados e discutidos os resultados obtidos, relacionando-os com a literatura estudada. Por fim, no capítulo cinco de considerações finais são retomados os principais objetivos do estudo e destacadas as conclusões alcançadas e possíveis sugestões para estudos futuros.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1 Sistema Massa-mola

Um sistema massa-mola é um modelo físico mecânico formado por uma massa acoplada à extremidade de uma mola que se encontra fixa por sua outra extremidade. Esse sistema pode ser visto na Figura 1, que também ilustra uma situação onde ele é retirado de sua posição de equilíbrio, posição onde a mola está em seu tamanho natural, pela ação de uma força \vec{F} .

Figura 1 – Sistema massa-mola, onde L é o comprimento da mola de constante elástica k , x_0 é ponto de equilíbrio e x são pontos atingidos pelo bloco ao oscilar em uma superfície sem atrito após sofrer a ação de uma força externa \vec{F} e ser liberado.



Fonte: Autora.

Ao deslocar o bloco, a mola é expandida, gerando uma força restauradora chamada de força elástica que tenta restabelecer o tamanho original, o que faz o sistema oscilar periodicamente em torno do ponto de equilíbrio. O sistema massa-mola é teórico, ele despreza forças dissipativas como atrito e resistência do ar e considera que a mola é ideal, ou seja, produz uma força restauradora que segue perfeitamente a Lei de Hooke. Lei de Hooke é uma lei que estabelece uma relação de proporcionalidade entre a força exercida sobre uma mola e a deformação gerada sobre ela, podendo ser resumida como:

$$F_e = -kx \quad (1)$$

Onde F_e é a força elástica, k é a constante elástica específica de cada mola que indica a sua rigidez e x é a deformação produzida na mola ao contraí-la ou expandí-la. O sinal negativo

indica que a força atua contra o deslocamento, já que é restauradora. É possível obter uma função horária para o valor de x que no caso do sistema massa-mola também representa a posição da massa ligada à mola. Utilizando a Lei de Hooke expressa na Equação (1) e a Segunda Lei de Newton tem-se:

$$\begin{aligned} ma &= -kx \\ a &= \frac{-kx}{m} \\ \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{kx}{m} &= 0 \end{aligned}$$

Admitindo

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (2)$$

a equação pode ser escrita como

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2x = 0$$

Essa é uma Equação Diferencial Ordinária (EDO) e pode ser resolvida de maneira simples. Primeiro supõe-se uma solução do tipo exponencial $x = e^{\lambda t}$ e deriva-se em relação ao tempo:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \lambda e^{\lambda t} \\ \frac{d^2x}{dt^2} &= \lambda^2 e^{\lambda t} \end{aligned}$$

Substituindo na equação diferencial:

$$\lambda^2 e^{\lambda t} + \omega^2 e^{\lambda t} = 0$$

Fatorando:

$$e^{\lambda t}(\lambda^2 + \omega^2) = 0$$

Como $e^{\lambda t} \neq 0$, segue que:

$$\lambda^2 + \omega^2 = 0$$

Resolvendo a equação:

$$\lambda^2 = -\omega^2$$

As raízes são:

$$\lambda = \pm i\omega$$

As soluções exponenciais associadas são:

$$x_1(t) = e^{i\omega t}, \quad x_2(t) = e^{-i\omega t}$$

Assim, a solução geral pode ser escrita como:

$$x(t) = C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}$$

onde C_1 e C_2 são constantes arbitrárias. Utilizando a fórmula de Euler:

$$e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i \sin(\omega t)$$

$$e^{-i\omega t} = \cos(\omega t) - i \sin(\omega t)$$

Substituindo na solução geral:

$$x(t) = C_1[\cos(\omega t) + i \sin(\omega t)] + C_2[\cos(\omega t) - i \sin(\omega t)]$$

Reagrupando os termos:

$$x(t) = (C_1 + C_2) \cos(\omega t) + i(C_1 - C_2) \sin(\omega t)$$

Definindo novas constantes reais:

$$A = C_1 + C_2, \quad B = i(C_1 - C_2)$$

obtém-se a forma real da solução:

$$x(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$$

que ainda pode ser escrita de forma equivalente como uma única função cosseno com fase.

Definindo a amplitude:

$$x_m = \sqrt{A^2 + B^2}$$

e a fase inicial ϕ tal que

$$A = x_m \cos \phi, \quad B = -x_m \sin \phi,$$

obtém-se:

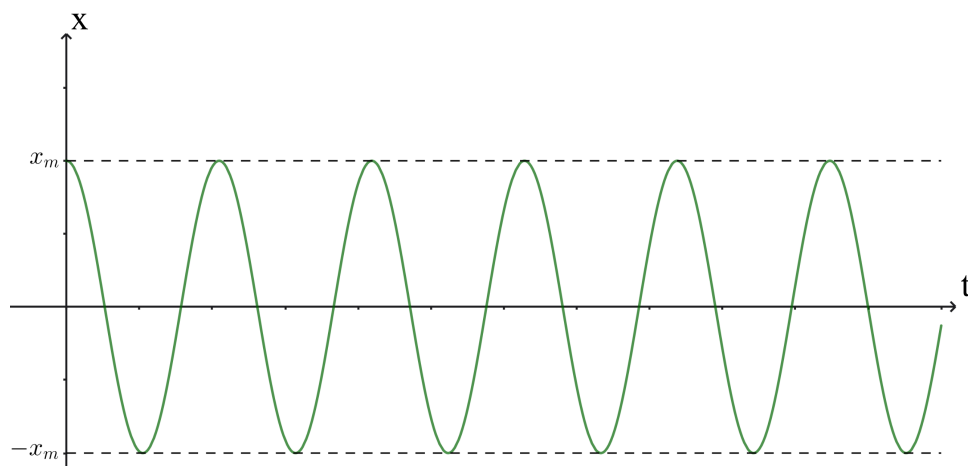
$$x(t) = x_m [\cos \phi \cos(\omega t) - \sin \phi \sin(\omega t)].$$

Usando a identidade trigonométrica $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$, segue que:

$$x(t) = x_m \cos(\omega t + \phi) \tag{3}$$

Essa é a função horária da posição, onde x_m é valor máximo de x que o sistema massa-mola pode assumir, ou seja, sua amplitude de movimento e ϕ é uma constante de fase. O gráfico dessa função pode ser visto na Figura 2.

Figura 2 – Gráfico de oscilação do sistema massa-mola.



Fonte: Autora.

Alguns parâmetros são comumente analisados ao estudar esse sistema oscilatório, como o seu período, que é o tempo levado para realizar uma oscilação completa, ou seja, retornar à sua posição inicial após ter alcançado a amplitude máxima e mínima. O período é representado pela letra T e sua unidade no SI é o segundo (s). Outro parâmetro é a frequência, que indica o número de oscilações realizadas a cada unidade de tempo, ela é representada pela letra f e utiliza no SI a unidade Hertz (Hz), que indica o número de oscilações por segundo. Período e frequência podem ser relacionados da seguinte forma:

$$T = \frac{1}{f} \quad (4)$$

Também é possível relacionar período e frequência com o termo ω . Para isso, será utilizado o desenvolvimento feito por Halliday, Resnick e Walker (2013). O deslocamento $x(t)$ deve retornar a seu valor inicial depois de um período T do movimento. Isto é, $x(t)$ deve ser igual a $x(t+T)$ para qualquer t . Para simplificar a análise, será considerado $\phi = 0$. Da Equação (3) tem-se então

$$x_m \cos(\omega t) = x_m \cos[\omega(t+T)]$$

A função cosseno se repete pela primeira vez quando seu argumento (a fase) aumentou de 2π radianos, de forma que deve-se ter, na equação anterior,

$$\begin{aligned} \omega(t+T) &= \omega t + 2\pi \\ \omega T &= 2\pi \\ \omega &= \frac{2\pi}{T} \end{aligned} \quad (5)$$

Assim, percebe-se que ω representa a frequência angular do movimento, podendo ser associada também com a frequência linear pela Equação (4):

$$\omega = 2\pi f \quad (6)$$

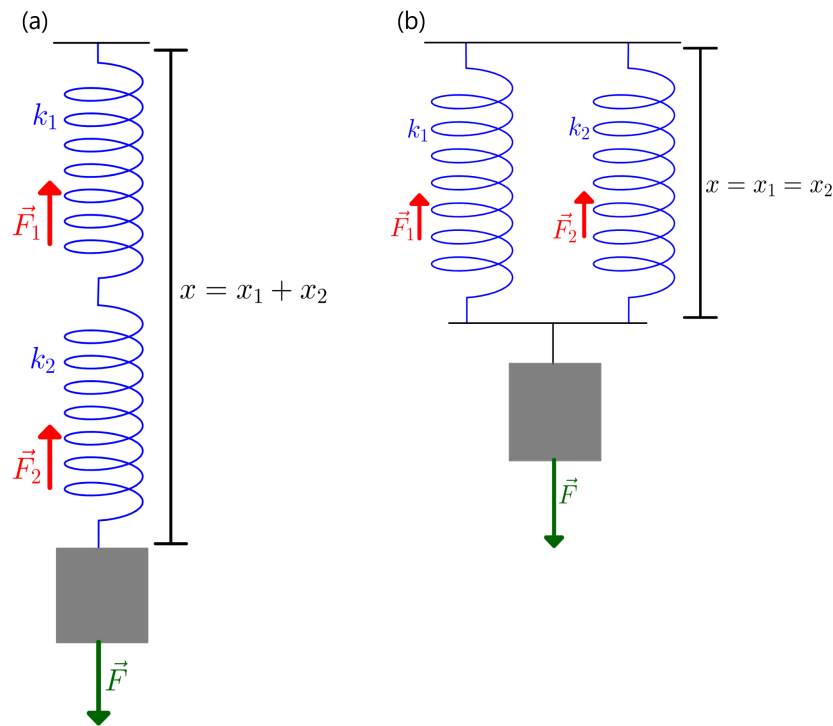
Retomando a Equação (2) e substituindo nas Equações (5) e (6) é possível obter o período e a frequência a partir da massa do bloco e da constante elástica do sistema.

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (7)$$

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (8)$$

2.1.1 Associações de molas

No estudo de sistemas que utilizam molas é comum associar esses materiais a fim de obter diferentes resultados. A associação consiste em unir as molas em um único sistema, essa união pode ser feita mantendo as molas lado a lado, essa é a chamada associação em paralelo, ou posicioná-las uma acima da outra, associação em série, como mostra a Figura 3.

Figura 3 – Associação de molas k_1 e k_2 (a) em série e (b) em paralelo e as forças atuantes.

Fonte: Autora.

Nesse formato as molas associadas podem ser tratadas como uma mola única que apresenta uma constante elástica equivalente. Para a associação em série, a constante equivalente pode ser obtida avaliando a força resultante e utilizando a Lei de Hooke, considerando que o tamanho x da associação de molas, ou seja, da mola equivalente é exatamente o somatório do tamanho x de cada mola, e o módulo da força externa \vec{F} exercida sobre a mola equivalente é igual ao módulo de \vec{F}_1 e \vec{F}_2 :

$$F = k_{eq}x_{eq}$$

$$F = k_{eq}(x_1 + x_2)$$

$$F = k_{eq} \left(\frac{F_1}{k_1} + \frac{F_2}{k_2} \right)$$

Como, em módulo, $F = F_1 = F_2$, tem-se a relação:

$$F = k_{eq} \left(\frac{F}{k_1} + \frac{F}{k_2} \right)$$

$$1 = k_{eq} \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right)$$

$$\frac{1}{k_{eq}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$$

para duas molas. Ou, para n molas:

$$\frac{1}{k_{eq}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \dots + \frac{1}{k_n} \quad (9)$$

Para a obtenção da constante equivalente da associação em paralelo é importante notar que a força externa \vec{F} exercida sobre a mola equivalente tem módulo igual ao somatório das forças exercidas pelas molas individuais, enquanto o comprimento x do sistema, ou seja, da mola equivalente é igual ao comprimento x das molas individuais, resultando em:

$$\begin{aligned} F &= F_1 + F_2 \\ F &= xk_1 + xk_2 \\ F &= x(k_1 + k_2) \\ x_{eq}k_{eq} &= x(k_1 + k_2) \\ k_{eq} &= k_1 + k_2 \end{aligned}$$

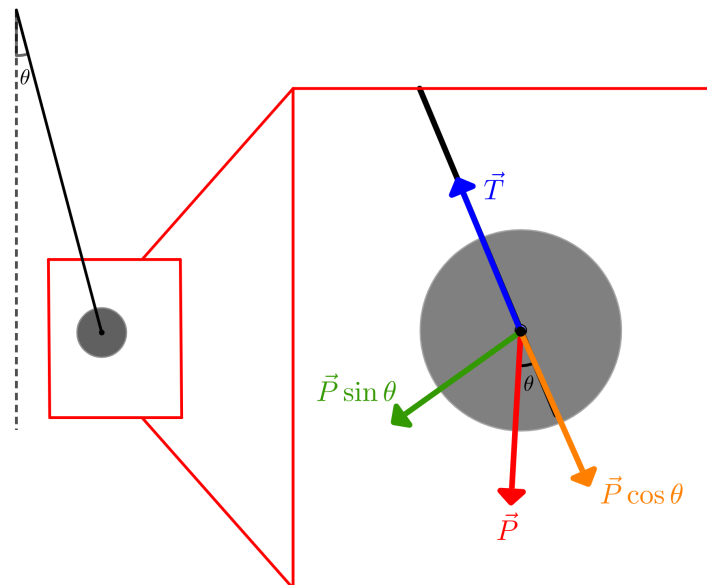
Novamente, o caso considera apenas duas molas, mas n molas podem ser associadas:

$$k_{eq} = k_1 + k_2 + \dots + k_n \quad (10)$$

2.2 Pêndulo Simples

O pêndulo é um sistema físico mecânico caracterizado por um corpo de certo comprimento preso por uma de suas extremidades, capaz de realizar oscilações. Na Física, o estudo desse sistema é feito por meio de modelos teóricos idealizados, que adotam simplificações a fim de facilitar a análise do movimento. Um desses modelos é o chamado pêndulo simples. Segundo Nussenzveig (2014), esse tipo de pêndulo consiste em uma massa m suspensa por um fio ou haste de comprimento L e massa desprezível. A massa m se move sobre um círculo de raio L sob a ação da força peso $\vec{P} = m\vec{g}$ e da tensão \vec{T} .

Figura 4 – Pêndulo simples oscilando com amplitude θ e as forças atuantes.



Fonte: Autora.

Na posição de equilíbrio, os módulos dessas forças se igualam ($P = T$) e a força resultante é nula. Ao deslocar o pêndulo dessa posição, a força peso é decomposta em componentes radial e

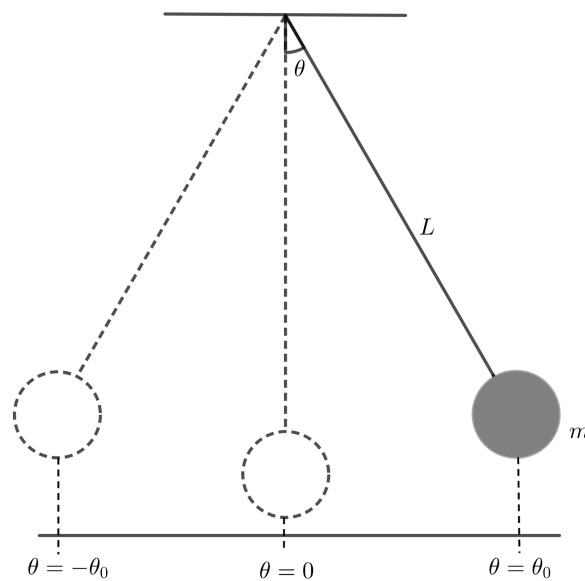
tangencial. A componente tangencial é responsável pelo movimento oscilatório e possui módulo $mg \sin \theta$. Como essa força atua sempre no sentido oposto ao deslocamento angular, sua expressão escalar pode ser escrita como

$$F_t = -mg \sin \theta \quad (11)$$

onde o sinal negativo indica o caráter restaurador da força.

É devido a essa força resultante que surge o movimento periódico dos pêndulos, que são soltos de um certo ângulo, passam pelo ponto de equilíbrio, onde a força resultante e o ângulo são iguais a 0, e viajam até atingir o mesmo ângulo do lado oposto, repetindo esse movimento.

Figura 5 – Oscilação do pêndulo simples, onde m é a massa, L é o comprimento do pêndulo e θ é o ângulo de oscilação.



Fonte: Autora.

É comum analisar a trajetória do movimento dos pêndulos a partir da posição angular, que pode ser relacionada com a distância linear através de relações trigonométricas:

$$x = L \sin \theta \quad (12)$$

Para obter a distância angular basta deixar θ em evidência.

$$\theta = \arcsin \frac{x}{L} \quad (13)$$

As simplificações mencionadas anteriormente consistem em desprezar a resistência do ar e o atrito, considerar que o fio é inextensível e tem massa desprezível e que a massa do pêndulo é puntiforme, todas esses aspectos resultam na existência de uma única força atuante que é exatamente a componente tangencial da força peso. Nesse trabalho o ângulo percorrido também será limitado a pequenos valores, o que permite o uso da aproximação $\sin \theta = \theta$. Com isso, a força responsável pela oscilação torna-se linear e a função horária da posição do pêndulo pode ser obtida como o sistema anterior, partindo da Equação (11) e obtendo uma EDO de fácil

resolução:

$$\begin{aligned}
 F &= -P \sin \theta \\
 ma &= -mg \sin \theta \\
 a &= -g \sin \theta \\
 a &= -g\theta \\
 L\alpha &= -g\theta \\
 \alpha &= \frac{-g}{L}\theta \\
 \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\theta &= 0
 \end{aligned}$$

Admitindo

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}} \quad (14)$$

a equação pode ser escrita como

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2\theta = 0$$

Cujo resultado é

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega t + \phi)$$

Nota-se que essa é a mesma função para posição já desenvolvida para o sistema massa-mola, mas aqui é utilizada a posição angular. Assim como essa, as demais equações do sistema massa-mola também podem descrever o movimento do pêndulo. Logo, retomando a definição de ω das Equações (5) e (14), tem-se que o período é:

$$\begin{aligned}
 \omega &= \frac{2\pi}{T} \\
 \sqrt{\frac{g}{L}} &= \frac{2\pi}{T} \\
 T &= 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}
 \end{aligned} \quad (15)$$

E pela Equação (4) a frequência é:

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{L}} \quad (16)$$

Essas relações ainda podem ser usadas para ângulos maiores, embora o aumento no ângulo provoque um erro cada vez maior. Para obter um período mais preciso é necessário resolver a EDO da força restauradora $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2 \sin \theta = 0$ sem a aproximação dos pequenos ângulos. Esse processo foi adaptado daquele realizado por Oliveira et al.(2024) e se inicia partindo de uma variação de energia mecânica nula, pois o sistema é considerado conservativo.

Se h_0 é a altura de onde o pêndulo foi solto em relação ao pivô, logo:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}mv^2 + mgh &= mgh_0 \\ \frac{1}{2}mL^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 - mgL \cos \theta &= -mgL \cos \theta_0 \\ \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 &= \frac{2g}{L}(\cos \theta - \cos \theta_0) \\ dt &= \sqrt{\frac{L}{2g}} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}}\end{aligned}$$

O período completo é 4 vezes o tempo para ir de 0 a θ_0 :

$$T = 4\sqrt{\frac{L}{2g}} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}}$$

Utilizando a identidade trigonométrica $\cos \theta = 1 - 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}$ e a substituição $\sin \frac{\theta}{2} = \sin \frac{\theta_0}{2} \sin \phi$, o período exato torna-se:

$$T = 4\sqrt{\frac{L}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\theta_0}{2} \sin^2 \phi}}$$

Aqui aparece uma integral elíptica completa do primeiro tipo:

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}}, \quad k = \sin \frac{\theta_0}{2} \quad (17)$$

O primeiro passo para a resolução dessa integral é realizar a expansão binomial do integrando,

$$f(\phi, k) = \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}} = (1 - k^2 \sin^2 \phi)^{-\frac{1}{2}}$$

cujos resultados são:

$$(1 - k^2 \sin^2 \phi)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \left(-\frac{1}{2}\right) (-k^2 \sin^2 \phi) + \left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{3}{2}\right) \frac{(-k^2 \sin^2 \phi)^2}{2} + \dots$$

ou, simplificando,

$$(1 - k^2 \sin^2 \phi)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}k^2 \sin^2 \phi + \frac{3}{8}k^4 \sin^4 \phi + \dots$$

Aplicando esse resultado de volta na integral da Equação (17) tem-se:

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \left(1 + \frac{1}{2}k^2 \sin^2 \phi + \frac{3}{8}k^4 \sin^4 \phi + \dots\right) d\phi$$

E o resultado após integrar a expressão na variável ϕ é:

$$K(k) = \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{1}{4}k^2 + \frac{9}{64}k^4 + \dots\right)$$

Por fim, retomando a definição de k , o período para qualquer amplitude de oscilação θ_0 pode ser obtido por meio da equação:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \left(1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\theta_0}{2} + \frac{9}{64} \sin^4 \frac{\theta_0}{2} + \dots\right) \quad (18)$$

É possível notar que quando θ_0 tende a 0, ou seja, tomando pequenos ângulos, o resultado dos senos também vai a 0, anulando todos os fatores multiplicados por senos, o que resulta na expressão $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ que é exatamente a Equação (15) apresentada anteriormente.

Ainda é possível obter uma expressão mais fácil de manipular analiticamente que permite estimativas rápidas e ainda é extremamente precisa para ângulos pequenos e médios. Essa expressão é obtida expandindo as funções senos da Equação (18) em séries de Taylor como:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \dots$$

Como a expressão é infinita, utiliza-se somente o primeiro termo que é o mais relevante, principalmente quando o valor de x , que representa o ângulo de amplitude, é pequeno a médio. Assim, tem-se que $\sin \frac{\theta_0}{2} = \frac{\theta_0}{2}$ e substituindo na Equação (18):

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \left(1 + \frac{1}{4} \cdot \frac{\theta_0^2}{4} + \frac{9}{64} \cdot \frac{\theta_0^4}{16} + \dots \right)$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \left(1 + \frac{\theta_0^2}{16} + \frac{9\theta_0^4}{1024} + \dots \right)$$

O ajuste dos coeficientes, encontrado em várias referências, leva à forma clássica:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \left(1 + \frac{\theta_0^2}{16} + \frac{11}{3072}\theta_0^4 + \dots \right) \quad (19)$$

Essa expressão com expansão em série de Taylor é vantajosa porque torna o período explícito em termos de θ_0 , mostrando claramente como a amplitude influencia o movimento, mas ainda permite cálculos rápidos e analíticos, enquanto a Equação (18) é mais exata, mas menos prática para manipulação direta.

2.3 Movimento Harmônico Simples (MHS)

Qualquer movimento que se repita a intervalos regulares é chamado movimento periódico ou movimento harmônico (HALLIDAY, RESNICK e WALKER, 2013). O Movimento Harmônico Simples (MHS) é um tipo de movimento periódico que considera como força resultante responsável pela oscilação uma força restauradora proporcional ao deslocamento e de sentido oposto a este, $F = -Cx$, ou seja, uma força linear que tem como gráfico uma reta e que age trazendo o corpo de volta a sua posição de equilíbrio quando é afastado dela. Sistemas que executam o MHS são chamados de osciladores harmônicos. A força restauradora não tem uma origem fixa, ela pode ter naturezas diferentes (elástica, gravitacional, elétrica etc), o que define essa força é poder ser escrita na forma $F = -Cx$, independente de sua natureza. A partir da aplicação dessa força na Segunda Lei de Newton obtém-se uma EDO cujo resultado é:

$$x(t) = x_m \cos(\omega t + \phi) \quad (20)$$

Através dessas informações é possível identificar o sistema massa-mola e o pêndulo simples como osciladores harmônicos. De fato, esses dois sistemas mecânicos são grandes representantes desse tipo de movimento.

2.4 Arduino

Arduino é uma ferramenta de prototipagem eletrônica. A sua parte física é composta por um placa de microcomputadores, exibida na Figura 6. Essa placa é compatível com vários componentes eletrônicos periféricos como luzes, sensores, motores, resistores, capacitores e conectores que permitem a criação de diferentes projetos eletrônicos com funções específicas. O Arduino também conta com uma plataforma digital que permite a introdução de programas construídos pelos usuários em linguagem C/C++. Esse programa indica para a placa os comandos a serem executados (SOUZA et al., 2011).

Figura 6 – Placa Arduino Uno.



Fonte: Autora.

O Arduino é uma ferramenta de ótimo custo benefício pelo grande número de projetos que podem ser desenvolvidos com ela, sendo, inclusive, uma alternativa poderosa no ensino de Física.

Para a obtenção dos dados foi utilizado o sensor ultrassônico HC-SR04, visível na Figura 7. Esse sensor calcula a que distância se encontra um objeto a sua frente, com capacidade de medir distâncias de 2 cm até 4 m. Esse dispositivo funciona enviando sinais ultrassônicos que refletem no objeto e retornam ao sensor, obtendo a distância do alvo a partir do tempo de viagem do sinal.

Figura 7 – Sensor ultrassônico HC-SR04.



Fonte: Autora.

Outro componente utilizado foi o módulo leitor microSD, apresentado na Figura 8. Esse dispositivo realiza a comunicação entre a placa Arduino e um cartão de memória microSD,

possibilitando a leitura e gravação de dados obtidos.

Figura 8 – Módulo leitor microSD.



Fonte: Autora.

2.5 Transformada de Fourier

A Transformada de Fourier é uma ferramenta matemática muito útil na análise de sinais. Ela atua produzindo uma representação de um sinal no domínio da frequência, evidenciando cada uma das frequências que o compõem, diferente da representação temporal que normalmente é feita (MARTINS et al., 2017). Isso porque muitos sinais são constituídos da superposição de várias ondas com frequências, amplitudes e fases diferentes. No geral, vemos a evolução temporal dessas ondas, mas com essa ferramenta é possível revelar todas as frequências de oscilação presentes.

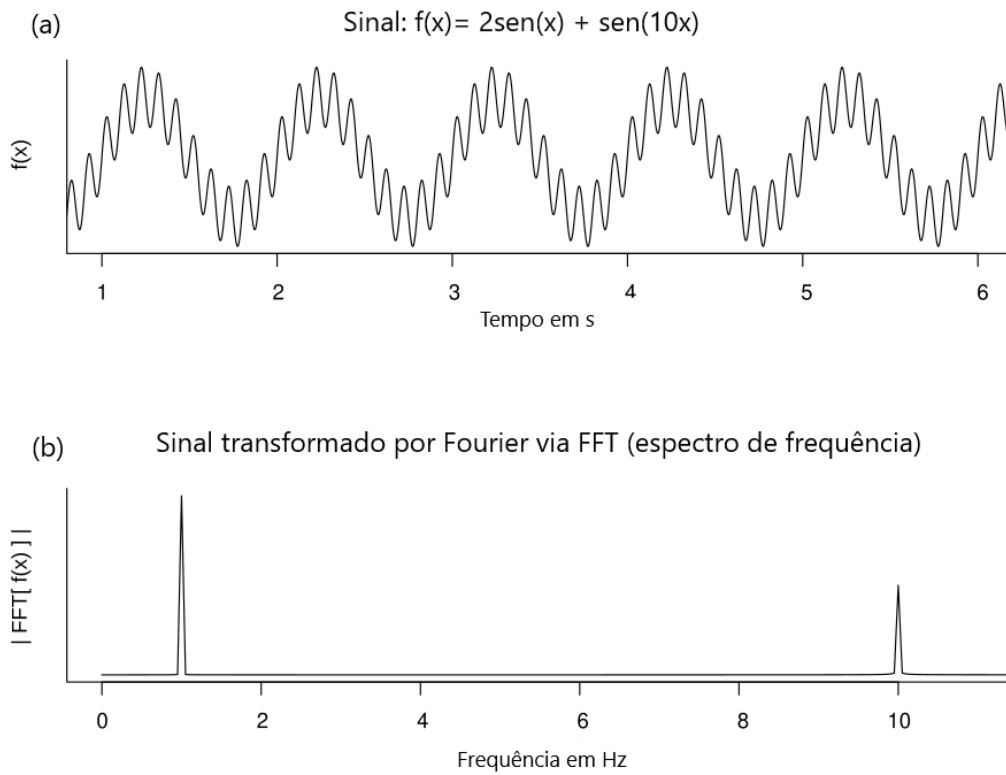
No caso de sinais periódicos, a Transformada de Fourier leva a um espectro discreto de frequências, normalmente descrito por séries de Fourier. Já para sinais não periódicos, o espectro resultante é contínuo, refletindo a presença de um conjunto infinito de componentes de frequência.

Em aplicações práticas, especialmente em sistemas digitais, os sinais são amostrados no tempo e possuem duração finita. Nesses casos, emprega-se a Transformada Discreta de Fourier (DFT), que corresponde à versão discreta da Transformada de Fourier contínua. A DFT fornece uma representação de um conjunto finito de amostras do sinal e é definida por uma soma finita de termos exponenciais complexos. Embora conceitualmente simples, o cálculo direto da DFT apresenta elevado custo computacional, o que motivou o desenvolvimento de algoritmos mais eficientes, como a Transformada Rápida de Fourier (FFT).

A FFT não é uma nova transformada, mas sim um algoritmo otimizado para o cálculo da DFT. Ao reduzir a complexidade computacional do problema, a FFT tornou viável uma análise em tempo real e consolidou a Transformada de Fourier como uma ferramenta muito útil

em diversas em áreas. A Figura 9 ilustra a atuação da FFT.

Figura 9 – Representação de sinal no (a) domínio do tempo e seu correspondente no (b) domínio da frequência.



3 METODOLOGIA

A pesquisa realizada possui caráter experimental e quantitativo, tendo como objetivo a reprodução dos sistemas massa-mola e pêndulo simples, bem como a verificação dos modelos teóricos existentes. Os experimentos foram realizados em laboratório, um ambiente não evacuado. Para o desenvolvimento dos experimentos foram utilizados os equipamentos expostos na Tabela 1.

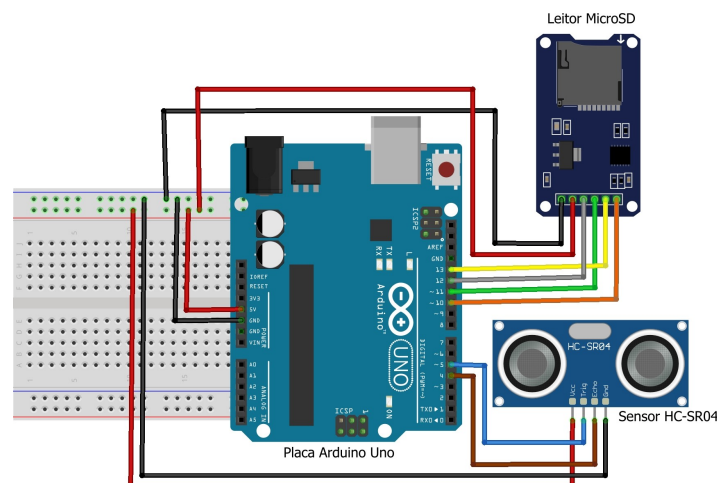
Tabela 1: Materiais e equipamentos utilizados nos experimentos.

Aparato de medição	Massa-mola	Pêndulo
Placa Arduino Uno	Mola 1	Fio de nylon
Sensor ultrassônico HC-SR04	Mola 2	Peso para corpo do pêndulo
Leitor de cartão microSD	Suporte de metal	Haste de 2 metros de altura
Jumpers	Objeto para massa do sistema	Trena
Cartão de memória microSD	Haste de 1 metro de altura	
Cabo USB	Régua	
Notebook		

Fonte: Autora.

O primeiro passo foi construir o aparato de medição. Para isso foram realizadas as devidas conexões entre as entradas da placa Arduino Uno, do sensor HC-SR04 e do leitor de cartão microSD por meio dos fios jumpers. As conexões seguiram as instruções dos fabricantes e podem ser vistas na Figura 10.

Figura 10 – Diagrama de montagem do sistema utilizando placa Arduino Uno, leitor de cartão microSD e sensor ultrassônico HC-SR04.



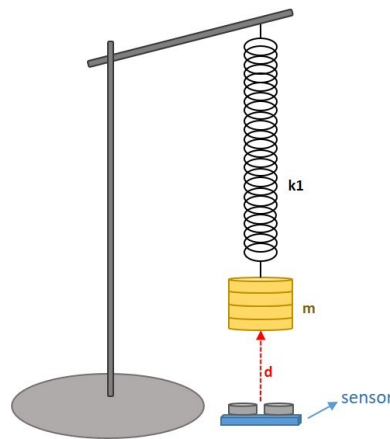
Fonte: Autora.

Após a montagem, o aparato foi conectado a um notebook por meio do cabo USB. Foi inserido no leitor o cartão que armazenaria os dados obtidos. Com a montagem física pronta, foi adicionado à plataforma digital o programa responsável pela execução desejada. Esse programa

tinha como objetivos: realizar as leituras do sensor, associar cada medida com o instante de tempo em que ela foi obtida e gravar os dados no cartão microSD. O programa completo pronto para uso encontra-se no apêndice A ao final do trabalho.

O primeiro experimento realizado utilizou o sistema massa-mola. Nesse caso, o sistema vertical. A montagem seguiu o esquema da Figura 11. As molas utilizadas possuíam 11 cm de comprimento, medida obtida com uma régua graduada em milímetros, já a massa que compõe o sistema foi obtida com uma balança digital de resolução 0,0001 g. Em alguns gráficos os valores das massas aparecem arredondados para facilitar a visualização, mas as medidas exatas encontram-se nos resultados.

Figura 11 – Esquema do experimento do sistema massa-mola onde k_1 representa a mola, m representa a massa do sistema e d é a distância entre o sensor e o sistema (fora de escala).



Fonte: Autora.

A Figura 12 apresenta a montagem real.

Figura 12 – Foto de experimento do sistema massa-mola.

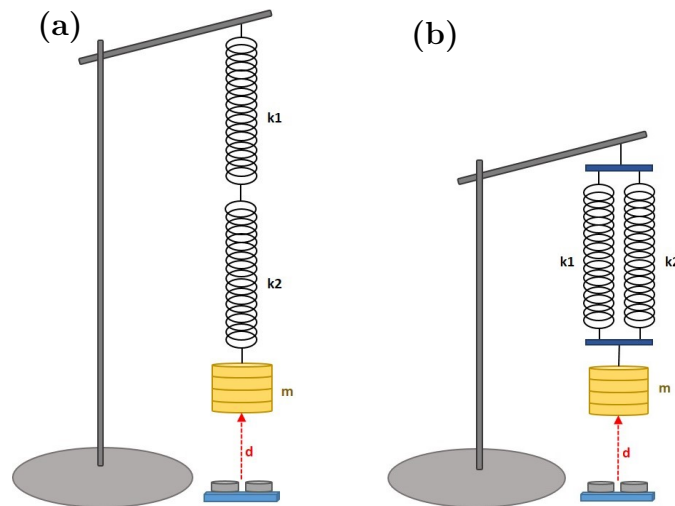


Fonte: Autora.

Para estudar o sistema massa-mola foram utilizados dois métodos: o método estático em que o sistema não oscilou, apenas a mola se deformou pela ação de diferentes forças peso, e o método dinâmico em que o sistema oscilou.

Ambos os métodos foram aplicados também com sistemas associadas em série e em paralelo. A montagem destes seguiu os esquemas da Figura 13.

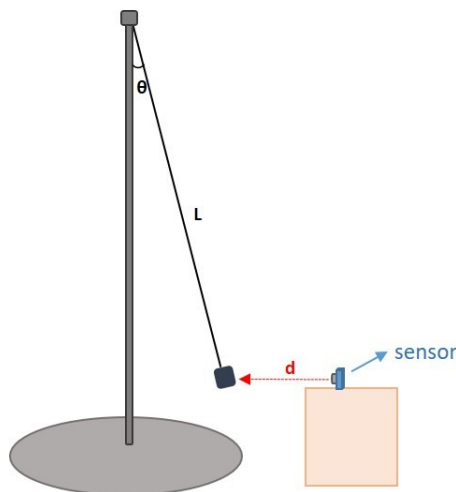
Figura 13 – Esquemas de experimentos do sistema massa-mola associado (a) em série e (b) em paralelo (fora de escala).



Fonte: Autora.

Para o experimento do pêndulo simples, a montagem seguiu o esquema da Figura 14. O comprimento do pêndulo, variável de interesse nesse caso, foi obtido com uma trena graduada em milímetros.

Figura 14 – Esquema do experimento do pêndulo simples, onde θ é o ângulo de oscilação, L é comprimento do pêndulo e d é a distância do sensor ao pêndulo (fora de escala).



Fonte: Autora.

A Figura 15 é um registro real do experimento do pêndulo simples.

Figura 15 – Foto de experimento do pêndulo simples.



Fonte: Autora.

Para o processo de análise de dados foram obtidos períodos experimentais de oscilação a partir da diferença entre instantes de tempo correspondentes a picos consecutivos do movimento. O período final foi obtido pela média de dez valores. Os períodos teóricos foram calculados com base nas equações apresentadas na fundamentação teórica e as frequências correspondentes foram obtidas pela inversão dos períodos. É importante salientar que os períodos teóricos do sistema massa-mola não são completamente teóricos, pois a constante elástica utilizada para obtê-los não foi a do fabricante e sim aquela obtida experimentalmente pelo método estático direto, que será melhor apresentado a seguir.

Os dados também foram processados utilizando linguagem Python, gerando gráficos da evolução temporal dos sistemas e gráficos período versus massa, e deformação da mola versus força peso para o sistema massa-mola, e período versus comprimento para o pêndulo. Além disso, a FFT foi aplicada para identificar as frequências de oscilação presentes nos sistemas.

Os métodos estático e dinâmico do sistema massa-mola foram utilizados na obtenção das constantes elásticas. E na análise do pêndulo foi obtido um valor experimental para a aceleração da gravidade. Ambos os processos utilizaram ajuste de gráficos.

Para a obtenção das incertezas foi considerada a incerteza instrumental dos equipamentos e também foi realizado o cálculo da propagação de incertezas pela Equação (21). No caso da balança, o valor da resolução que é de 0,0001 g será a incerteza, já que a balança é um aparelho digital. Já para trenas e réguas graduadas em milímetros, que são dispositivos analógicos, a incerteza é metade da menor divisão da escala, ou seja, 0,5 mm.

$$\sigma_f = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \sigma_{x_i} \right)^2} \quad (21)$$

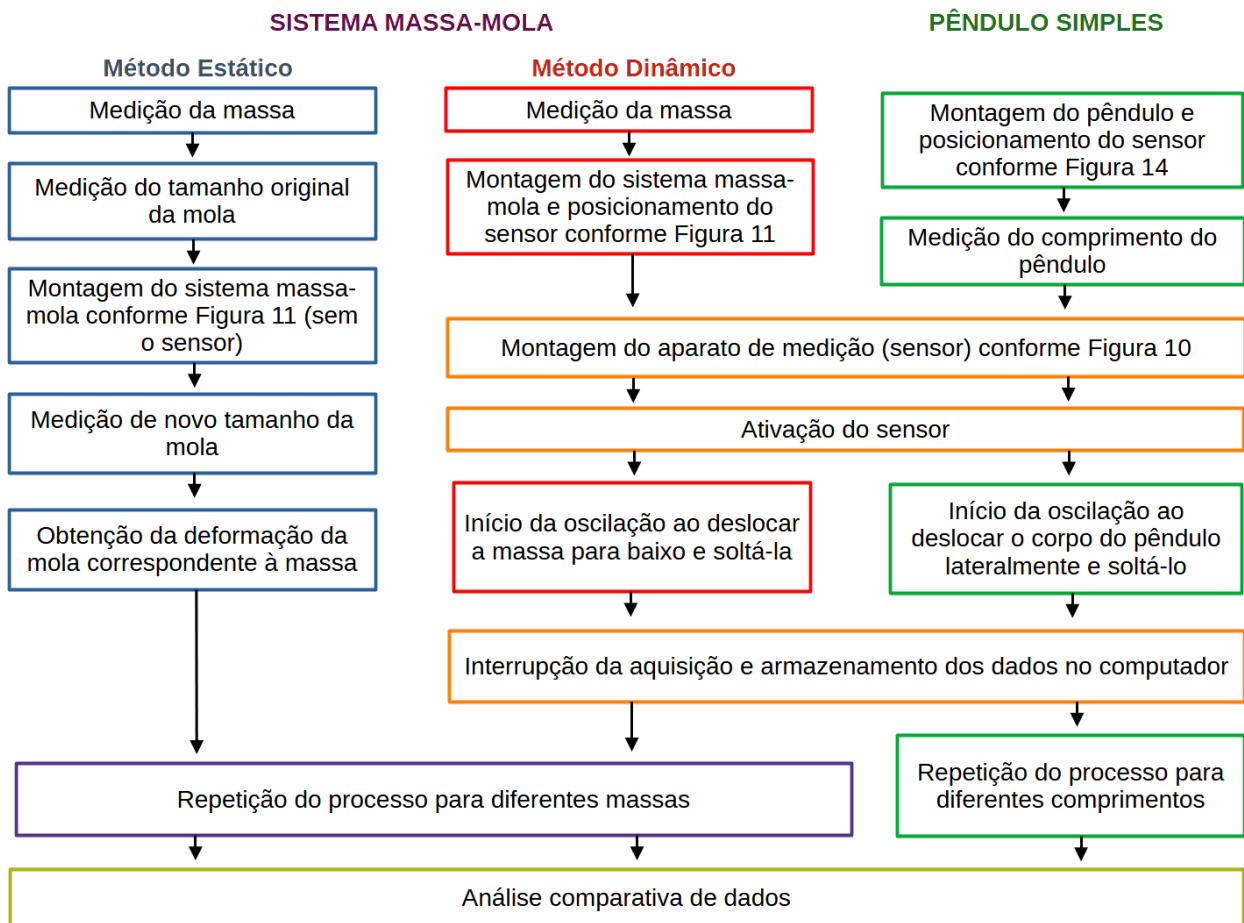
Para medidas que utilizaram a média de valores, como o período, a incerteza foi estimada pelo desvio padrão desses dados por meio da Equação (22).

$$\sigma_T = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (T_i - \bar{T})^2} \quad (22)$$

Foram realizadas comparações entre os diferentes métodos de obtenção de dados, também entre os valores teóricos e experimentais, e entre o comportamento geral esperado pela teoria e aquele visto na prática. A partir dessas comparações, a teoria foi confrontada com o fenômeno real e verificada.

Os procedimentos experimentais dos dois experimentos estão resumidos na Figura 16.

Figura 16 – Diagrama do procedimento experimental para os experimentos de sistema massa-mola (métodos estático e dinâmico) e pêndulo simples.



Fonte: Autora.

4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Na análise de oscilações, período e frequência são variáveis de grande interesse. Assim, esses dois parâmetros tiveram seus valores experimentais e teóricos comparados. No caso do sistema massa-mola, as Tabelas 2 e 3 realizam essa comparação.

Tabela 2: Comparativo experimental e teórico dos períodos de oscilação dos sistemas massa-mola.

Massa (kg)	Período Experimental (s)			Período Teórico (s)		
	Mola única	Série	Paralelo	Mola única	Série	Paralelo
0,198205 ± 0,000001	0,668 ± 0,009	0,939 ± 0,008	0,47 ± 0,01	0,679	0,946	0,473
0,248073 ± 0,000001	0,75 ± 0,01	1,053 ± 0,009	0,531 ± 0,009	0,760	1,067	0,532
0,298031 ± 0,000001	0,82 ± 0,01	1,146 ± 0,008	0,585 ± 0,009	0,834	1,169	0,585
0,347991 ± 0,000001	0,891 ± 0,008	1,244 ± 0,008	0,62 ± 0,01	0,900	1,264	0,630
0,397968 ± 0,000001	0,95 ± 0,01	1,321 ± 0,009	0,665 ± 0,01	0,964	1,356	0,672

Fonte: Autora.

Tabela 3: Comparativo experimental e teórico das frequências de oscilação dos sistemas massa-mola.

Massa (kg)	Frequência Experimental (Hz)			Frequência Teórica (Hz)		
	Mola única	Série	Paralelo	Mola única	Série	Paralelo
0,198205 ± 0,000001	1,49 ± 0,02	1,065 ± 0,009	2,13 ± 0,04	1,473	1,057	2,114
0,248073 ± 0,000001	1,33 ± 0,01	0,949 ± 0,008	1,88 ± 0,03	1,316	0,937	1,880
0,298031 ± 0,000001	1,22 ± 0,01	0,873 ± 0,006	1,71 ± 0,02	1,199	0,855	1,709
0,347991 ± 0,000001	1,12 ± 0,01	0,804 ± 0,005	1,61 ± 0,02	1,111	0,791	1,587
0,397968 ± 0,000001	1,05 ± 0,01	0,757 ± 0,005	1,50 ± 0,02	1,037	0,737	1,488

Fonte: Autora.

Os valores experimentais do sistema massa-mola apresentam boa concordância com os teóricos, confirmando que o período aumenta e a frequência diminui com o aumento da massa, conforme previsto pelo modelo do MHS através das Equações (7) e (8).

O mesmo comparativo foi realizado para o pêndulo simples:

Tabela 4: Comparativo experimental e teórico dos períodos e frequências de oscilação do pêndulo simples.

Comprimento (m)	Período (s)		Frequência (Hz)	
	Experimental	Teórico	Experimental	Teórica
2,0000±0,0005	2,838±0,009	2,8370	0,3523±0,0001	0,3524
1,8000±0,0005	2,685±0,009	2,6914	0,3724±0,0001	0,3715
1,6000±0,0005	2,534±0,008	2,5374	0,3946±0,0001	0,3941
1,4000±0,0005	2,36±0,01	2,3736	0,4237±0,0001	0,4213
1,2000±0,0005	2,189±0,009	2,1975	0,4568±0,0001	0,4550
1,0000±0,0005	1,986±0,008	2,0060	0,5035±0,0002	0,4985

Fonte: Autora.

Assim como o sistema massa-mola, os valores experimentais do período e da frequência do pêndulo simples mostraram-se bem próximos daqueles previstos teoricamente. Aqui o período cresce com o aumento do comprimento do pêndulo, enquanto a frequência diminui, assim como indica o modelo teórico representado pelas Equações (15) e (16).

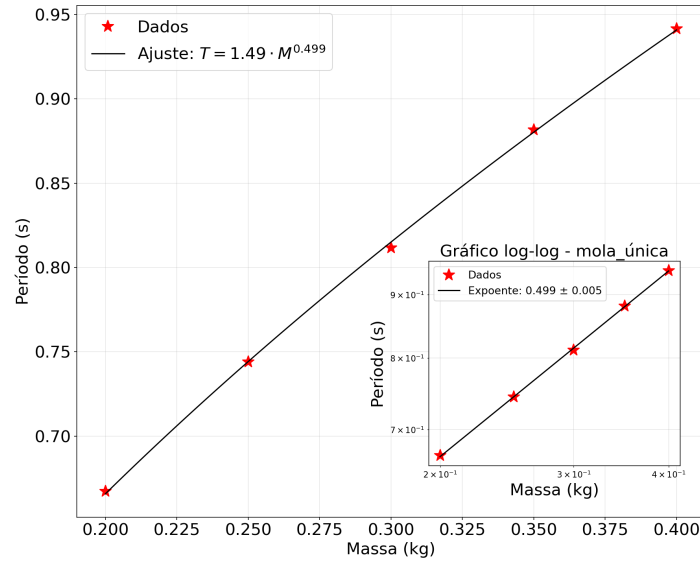
Contra-intuitivamente, a maioria dos valores experimentais mostraram-se menores para período e maiores para frequência do que os teóricos, mesmo que a teoria despreze forças dissipativas responsáveis por aumentar o período e diminuir a frequência em situações reais. Dentre os possíveis motivos para essas disparidades estão a perda de dados pelo sensor. A falta de dados impede que se perceba onde encontram-se realmente os picos utilizados no cálculo do período, resultando em períodos menores. Quanto mais rápida a oscilação mais esse efeito aparece, isso ocorre justamente porque oscilações rápidas significam menos tempo para a captura de dados, ou seja, perda de informações.

Ao distribuir esses dados de período em função da massa em um gráfico para o sistema massa-mola, percebe-se que o crescimento constatado não acontece de forma aleatória.

Os gráficos corroboram com a teoria na medida em que demonstram que o crescimento do período em função da massa se dá como uma lei de potência, exatamente o que indica a Equação (23), adaptada da Equação (7).

$$\begin{aligned}
 T &= 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \\
 T &= \frac{2\pi}{k^{0,5}}m^{0,5}
 \end{aligned}
 \tag{23}$$

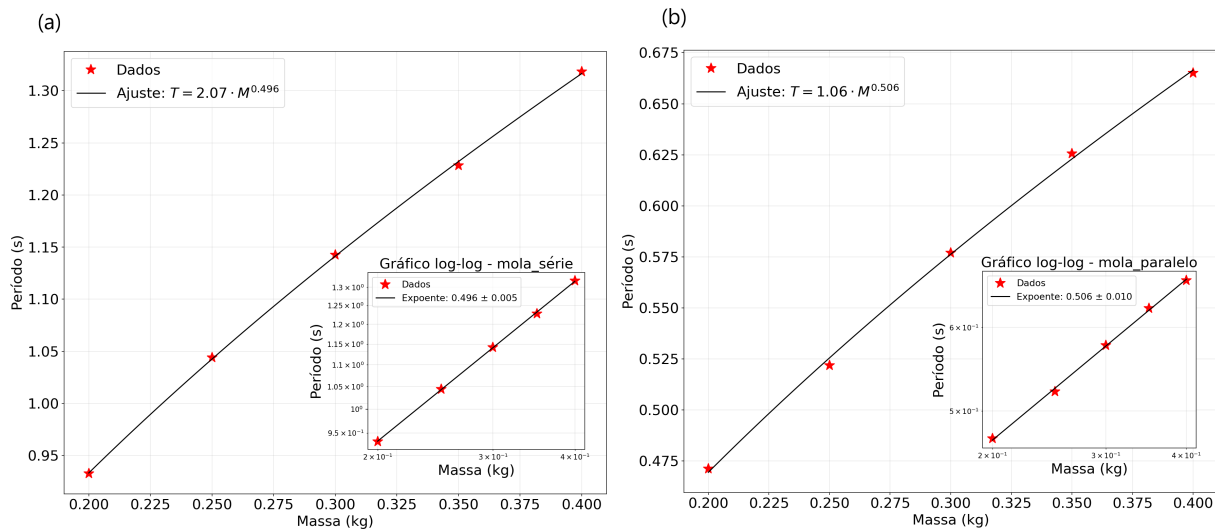
Figura 17 – Período versus massa da mola única



Fonte: Autora.

Para associações de molas o gráfico também deriva de leis de potência:

Figura 18 – Período versus massa da associação (a) em série e (b) em paralelo.



Fonte: Autora.

A partir dos gráficos das Figuras 17 e 18 também faz-se a análise da constante elástica pelo método dinâmico, em que sistema oscilou. Isso pode ser feito comparando a lei de potência teórica com aquela obtida pelo ajuste das curvas dos dados experimentais. Retomando a Equação (23) tem-se:

$$T = \frac{2\pi}{k^{0,5}} m^{0,5}$$

$$1,49m^{0,499} = \frac{2\pi}{k^{0,5}} m^{0,5}$$

$$1,49 \approx \frac{2\pi}{k^{0,5}}$$

$$k \approx 17,7822 \text{ N/m}$$

O mesmo procedimento foi realizado para os sistemas associados e as constantes encontram-se na Tabela 6.

Essas constantes elásticas também foram obtidas pelo método estático. A Tabela 5 apresenta os valores alcançados pela Lei de Hooke para uma mesma mola. Para que a lei seja válida, o valor deve permanecer fixo mesmo alterando a massa.

Tabela 5: Relação entre massa e deformação da mola, e a constante elástica resultante.

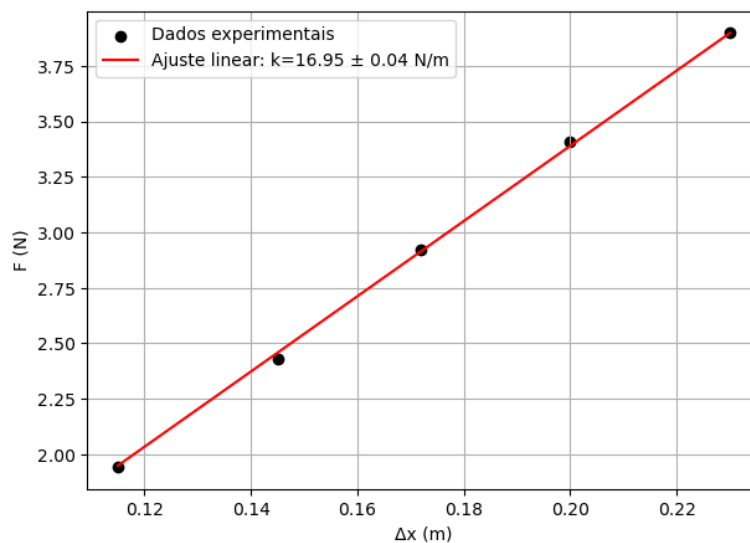
Massa (kg)	Deformação (m)	Constante elástica (N/m)
0,198205±0,000001	0,1150±0,0005	16,87±0,07
0,248073±0,000001	0,1450±0,0005	16,76±0,05
0,298031±0,000001	0,1720±0,0005	16,97±0,05
0,347991±0,000001	0,2000±0,0005	17,05±0,04
0,397968±0,000001	0,2300±0,0005	16,96±0,03

Fonte: Autora.

Embora haja variação entre os valores, essa variação é de apenas 0,2 N/m dentro da margem da incerteza e pode ser justificada pelas condições imperfeitas do experimento, indicando então a coerência do modelo.

Para obter uma constante elástica mais precisa pelo método estático, os dados medidos foram dispostos em um gráfico e foi feito o ajuste linear.

Figura 19 – Força versus deformação da mola única.



Fonte: Autora.

Aqui a constante tem valor igual a 16,95 N/m, com incerteza de 0,04 N/m. Esse processo

de ajuste linear também ocorreu com as associações de molas. Os resultados encontram-se na Tabela 6.

Uma extensão do método estático para as associações é aplicar as constantes individuais obtidas por esse método nas Equações (9) e (10) e obter as constantes equivalentes. Essa é uma maneira indireta de se chegar às constantes. Nesse caso, foram utilizados os valores $16,95 \pm 0,04$ N/m, da mola apresentada e $18,09 \pm 0,13$ N/m, referente à outra mola.

A Tabela 6 apresenta o comparativo entre as constantes elásticas dos métodos estático e dinâmico para todas as situações.

Tabela 6: Comparativo entre diferentes métodos de obtenção de constantes elásticas.

Método estático						Método dinâmico		
Direto			Indireto			Mola única	Série	Paralelo
Mola única	Série	Paralelo	Mola única	Série	Paralelo			
$16,95 \pm 0,04$ N/m	$8,86 \pm 0,05$ N/m	$34,63 \pm 0,12$ N/m	–	$8,75 \pm 0,03$ N/m	$35,04 \pm 0,14$ N/m	17,78 N/m	9,21 N/m	35,13 N/m

Fonte: Autora.

O fato de os valores estáticos diretos, provenientes da Lei de Hooke, já verificada pela Tabela 5 e o gráfico da Figura 19, serem semelhantes aos dinâmicos reforça que o modelo teórico utilizado para descrever a oscilação é adequado. O movimento de fato é gerado por uma força restauradora aproximadamente linear com pouca influência de forças dissipativas, ou seja, é um movimento muito próximo de um MHS ideal.

Esses resultados também revelam que as associações têm constantes elásticas diferentes das suas molas individuais, com as Equações (9) e (10) indicando corretamente os valores dessas constantes.

A partir dessa compreensão sobre as constantes elásticas das associações é possível perceber porque os valores das Tabelas 2 e 3 se comportaram assim. Nelas nota-se que para a associação em série, de menor constante elástica entre os três casos como visto agora na Tabela 6, o período foi o maior, enquanto a frequência foi a menor. Já no caso da associação em paralelo, de maior constante elástica, ocorreu o inverso, essa tendência confirma as relações entre período, frequência e constante elástica previstas pela teoria e representadas pelas Equações (7) e (8).

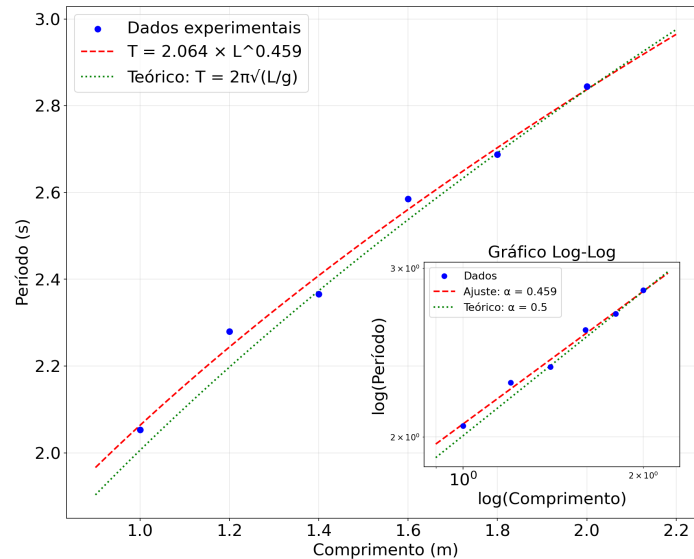
Igualmente ao sistema massa-mola, o modelo teórico do pêndulo simples representado pela Equação (15) também apresenta um crescimento do período em função do comprimento como uma lei de potência:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

$$T = \frac{2\pi}{g^{0,5}}L^{0,5} \quad (24)$$

Esse comportamento é exatamente aquele verificado pelos dados experimentais, como é visto no gráfico da Figura 20.

Figura 20 – Período versus comprimento do pêndulo simples



Fonte: Autora.

A partir da lei que gera o gráfico é possível obter um valor experimental da aceleração da gravidade, utilizando a Equação (24) e igualando-a a essa lei de potência.

$$T = \frac{2\pi}{g^{0,5}}L^{0,5}$$

$$2,064L^{0,459} = \frac{2\pi}{g^{0,5}}L^{0,5}$$

$$2,064 \approx \frac{2\pi}{g^{0,5}}$$

$$g \approx 9,26 \text{ m/s}^2$$

Determinar experimentalmente o valor da aceleração da gravidade, uma grandeza já conhecida, é uma maneira eficiente de verificar modelos teóricos. Ao utilizar equações e dados experimentais para obter a aceleração da gravidade mede-se a coerência do modelo teórico e/ou a precisão do experimento realizado. Nesse caso, o valor obtido mostrou-se muito próximo do conhecido.

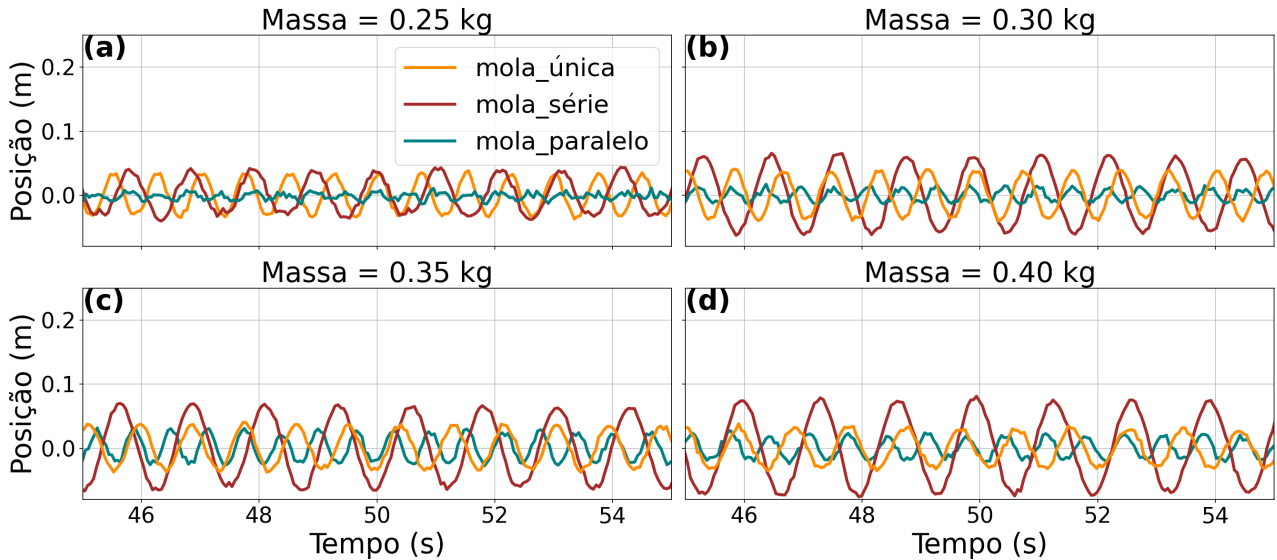
Tabela 7: Comparativo da aceleração da gravidade.

Aceleração experimental (m/s ²)	Aceleração tabelada (m/s ²)
9,26	9,81

Fonte: Autora.

A partir dos dados coletados também foi possível avaliar a evolução temporal por meio de gráficos posição versus tempo. O gráfico da Figura 21 apresenta essa evolução para os sistemas massa-mola.

Figura 21 – Evolução temporal dos sistemas massa-mola para massas de aproximadamente (a) 0,25 kg, (b) 0,30 kg, (c) 0,35 kg e (d) 0,40 kg.

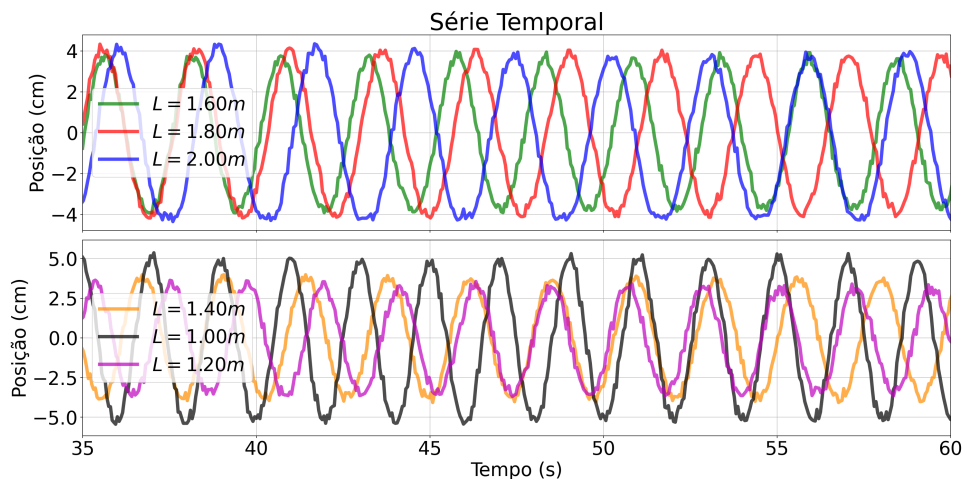


Fonte: Autora.

O que se pode perceber desses gráficos é inicialmente o formato senoidal assumido, confirmando a capacidade da Equação (20) do MHS em descrever a evolução do movimento desse sistema, como prevê a teoria.

Além disso, também percebe-se visualmente o comportamento verificado nas tabelas: diminuição da frequência com o aumento da massa e aumento da frequência com aumento da constante elástica, esse último percebido ao comparar os gráficos produzidos pelas diferentes associações.

Figura 22 – Evolução temporal do movimento do pêndulo simples.

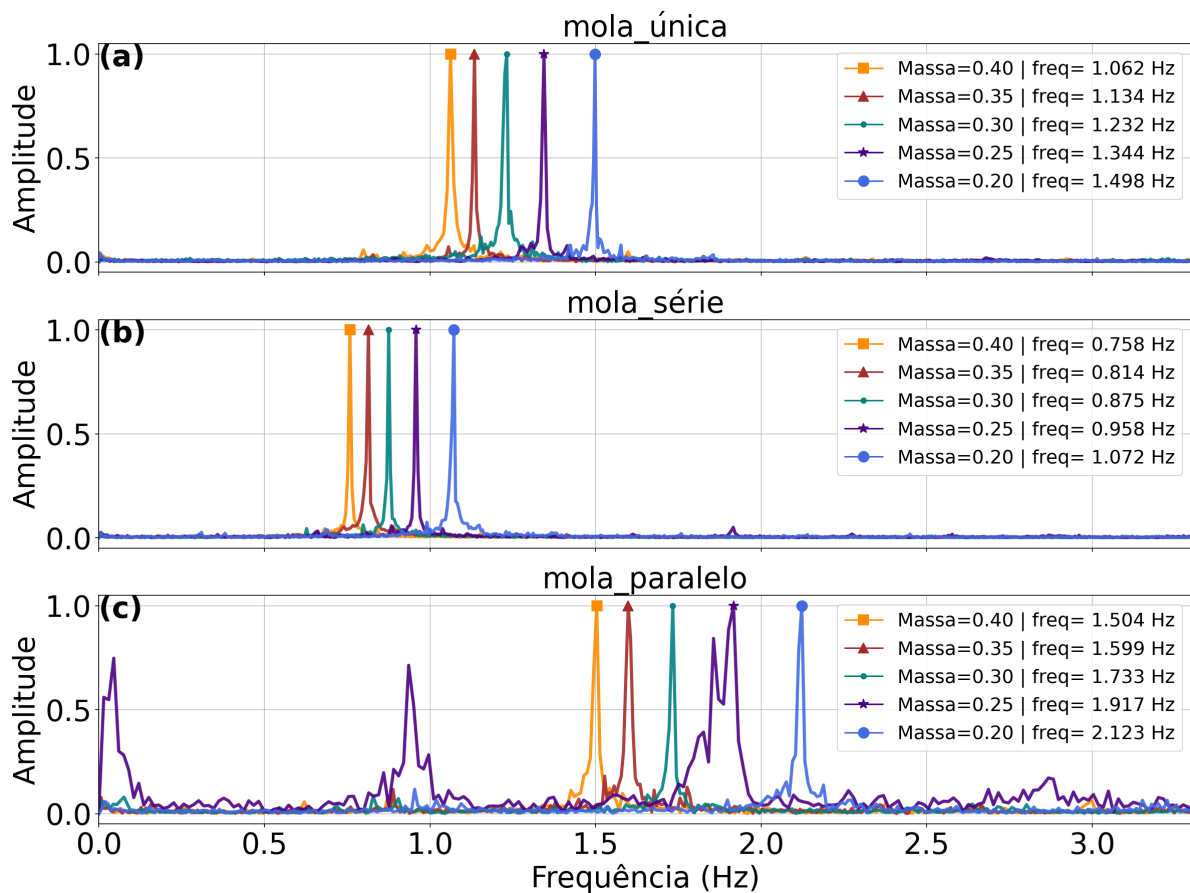


Fonte: Autora.

Em relação aos gráficos de evolução temporal do pêndulo, apresentados na Figura 22, as conclusões para o sistema massa-mola permanecem, já que ambos seguem o MHS. Percebe-se, novamente, um formato senoidal nos gráficos, além do aumento da frequência com a diminuição do comprimento do pêndulo, como já verificado na Tabela 4.

A frequência dos sistemas também pode ser visualizada através dos gráficos construídos com a ferramenta FFT. Na Figura 23 estão os gráficos para os sistemas massa-mola.

Figura 23 – Frequência de oscilação e amplitude do movimento dos sistemas massa-mola constituídos por (a) mola única e associações (b) em série e (c) em paralelo.

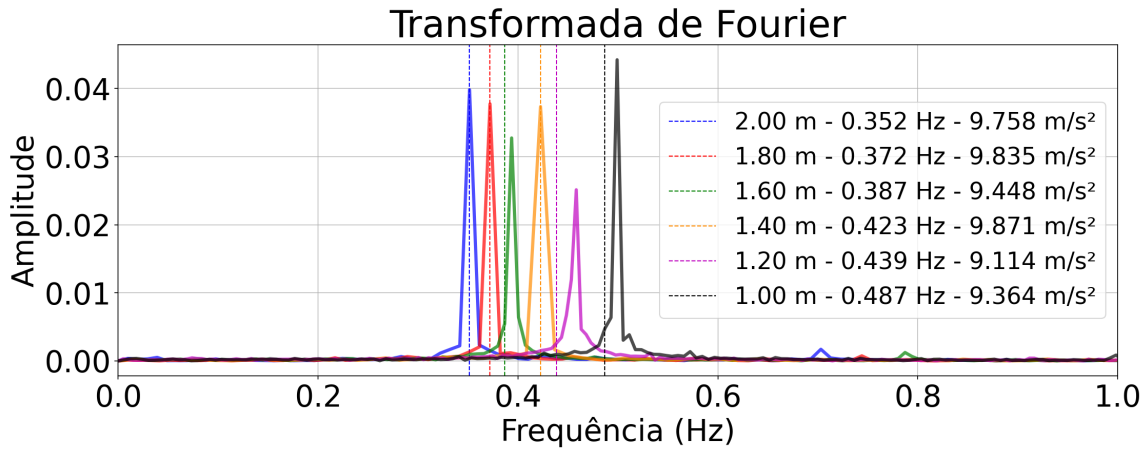


Fonte: Autora.

O uso da FFT possibilita a visualização de todas as frequências de oscilação do movimento, e a partir dos gráficos, tanto da Figura 23 para o sistema massa-mola, quanto da Figura 24 para o pêndulo simples, percebe-se, no geral, um pico de frequência bem definido, indicando que o movimento é predominantemente periódico oscilando naquela frequência, com pouca influência de ruídos e efeitos dissipativos que se expressariam por meio de outras frequências. O ruído mais expressivo se manifestou na associação de molas em paralelo, o que indica que esse formato de associação é mais instável. Instabilidade essa gerada provavelmente pela grande constante de mola que produz oscilações mais rápidas. Mesmo assim, o gráfico da massa 0,25 kg da associação em paralelo apresentou um ruído totalmente exagerado, com dois grandes picos de frequência, além do pico principal. Esse comportamento não é normal e indica que houve

problemas na execução do experimento nesse caso específico, uma possível causa foi a haste ter ficado excessivamente solta e assim acabou oscilando junto com o sistema em outras frequências.

Figura 24 – Frequência de oscilação e amplitude do movimento do pêndulo simples.

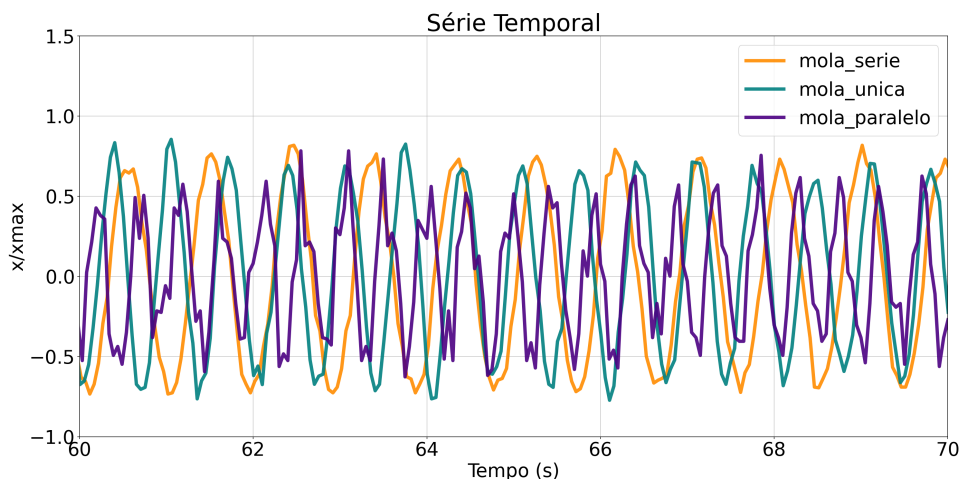


Fonte: Autora.

Algumas linhas pontilhadas na Figura 24 que representam a frequência exata de oscilação não coincidiram com os picos, isso ocorreu possivelmente devido à resolução de frequência limitada e ao vazamento espectral. A FFT divide o espectro em um número finito de pontos. Se o sinal estiver entre dois pontos, o pico real não é amostrado diretamente. Além disso, quando o sinal não é perfeitamente periódico dentro da janela de amostragem, a energia "vaza" para frequências adjacentes, deslocando o pico máximo.

O gráfico da Figura 24 também apresenta valores para a aceleração da gravidade obtidos a partir da frequência de oscilação experimental e da Equação (16) para cada comprimento do pêndulo. Percebe-se valores ainda muito próximos de $g = 9,81 \text{ m/s}^2$, com alguns comprimentos mostrando resultados quase equivalentes. O que se pode inferir é que, nesses casos, o experimento foi realizado nas melhores condições possíveis e o sensor funcionou com menos erros.

Figura 25 – Evolução temporal do movimento dos sistemas massa-mola para massa de cerca de 0,20 kg.



Fonte: Autora.

O gráfico de evolução temporal também foi realizado com uma massa bem pequena, de cerca de 0,20 kg e pode ser visto na Figura 25.

Esse gráfico com menor massa ilustra a ideia de perda de dados já mencionada. Ao invés de curvas suaves, o gráfico é truncado e com muitas pontas, resultado da falta de informação para preencher as lacunas entre dois pontos, gerando linhas retas e, assim, essa aparência. Essa perda de dados provém, possivelmente, de pausas obrigatórias que o sensor deve fazer para executar os demais comandos dados a ele como abrir o cartão de memória e gravar dados, não conseguindo nesse intervalo medir distâncias. Essa é uma limitação própria desse método de obtenção de dados, sendo um desafio no uso desse sensor.

5 CONCLUSÃO

A análise dos sistemas oscilatórios estudados, tanto o sistema massa-mola quanto o pêndulo simples, confirmou que os modelos clássicos do MHS descrevem de forma consistente o comportamento desses sistemas. Observou-se que o período de oscilação apresenta uma relação direta com os parâmetros característicos do sistema, como a massa no caso do sistema massa-mola e o comprimento no caso do pêndulo, enquanto a frequência apresenta a relação inversa correspondente. Esse comportamento é esperado teoricamente e foi confirmado experimentalmente, evidenciando a validade das equações do movimento harmônico simples para prever oscilações periódicas.

No sistema massa-mola, tanto em configurações com uma única mola quanto em associações de molas em série e em paralelo, verificou-se que o período aumenta de forma previsível com a massa do sistema. A associação em série demonstrou ainda que a constante elástica equivalente diminui em relação a uma única mola, resultando em oscilações mais lentas e frequências menores, já a associação em paralelo mostrou que a constante elástica equivalente aumenta em relação a uma única mola, resultando em oscilações mais rápidas e frequências maiores, de acordo com a teoria. Essa consistência entre os resultados experimentais e os modelos teóricos indica que as leis fundamentais que regem o movimento oscilatório se aplicam mesmo quando diferentes configurações de molas são utilizadas, reforçando a robustez do modelo matemático adotado. Semelhante ao sistema massa-mola, a análise do pêndulo simples mostrou que seu período cresce com o comprimento do fio, enquanto a frequência diminui, comportamento que segue a proporcionalidade prevista pelo modelo teórico.

O formato senoidal das oscilações, observado nas séries temporais, demonstra que o movimento pode ser descrito por funções trigonométricas de forma precisa, confirmando a natureza harmônica do sistema. Além disso, a análise de frequência revelou a presença de um pico dominante, indicando que o movimento é praticamente periódico e que apesar de haver ruídos, estes não comprometendo a aplicação do modelo teórico para descrição do fenômeno.

Algo intrigante foi a constatação de períodos menores do que os esperados e, consequentemente, frequências maiores. Os modelos teóricos para a obtenção do período dos sistemas desconsideram forças dissipativas, que contribuem para o atraso dos sistemas, tornando-os mais lentos. Logo, períodos maiores do que os teóricos já eram esperados, no entanto, isso não ocorreu. A principal explicação pode ser a perda de dados pelo sensor, seu atraso próprio possivelmente fez com que ele não pudesse capturar todas as distâncias ao longo do movimento e muitas das distâncias perdidas seriam necessárias para o cálculo dos parâmetros. Sem elas, o período acaba sendo subestimado. Essa limitação, no entanto, apesar de não poder ser evitada, não diminui a eficácia do sensor como método de captura de dados, tendo em vista que, como apresentado neste trabalho, muitos dados experimentais e teóricos mostraram-se idênticos dentro da margem gerada pela incerteza, ou seja, uma precisão excelente.

Dessa forma, é possível dizer que esses resultados positivos dizem mais sobre o método de captura dos dados do que sobre os próprios modelos teóricos, já consolidados no meio científico. Partindo de modelos tão confiáveis, os resultados experimentais deveriam então ser realmente próximos dos esperados, mas a obtenção de períodos e frequências de oscilação tão precisos e a possibilidade de uma visualização clara da evolução temporal do movimento que segue uma função, demonstram que esse método de captura de dados é muito eficaz para experimentos como esse e pode ser utilizado com muitos objetivos, desde a verificação de modelos teóricos, como aqui foi feito, até o uso como ferramenta de ensino do conteúdo de oscilações.

Em síntese, os resultados obtidos confirmam que tanto o pêndulo simples quanto os sistemas massa-mola seguem de forma consistente os princípios do movimento harmônico simples. O estudo demonstrou que, mesmo com diferentes configurações e características físicas, os sistemas oscilatórios exibem comportamentos previsíveis, senoidais e periódicos, com períodos e frequências em total concordância com os modelos teóricos. Além disso, partindo do pressuposto de que os modelos em questão são muito confiáveis, a grande concordância dos dados experimentais com os esperados demonstra a viabilidade do uso do Arduino e do sensor ultrassônico como ferramenta de captura de dados em experimentos científicos.

Como perspectivas para o aprofundamento desse trabalho estão o uso de outros componentes compatíveis com o Arduino, como o sensor acelerômetro MPU-6050, o sensor óptico e o potenciômetro que podem também ser utilizados na captura de movimentos oscilatórios. Essas possibilidades permitirão assim a expansão e o fortalecimento do uso do Arduino como ferramenta de pesquisa científica, tendo em vista as potencialidades desse instrumento.

Outra perspectiva é o aprimoramento e adaptação deste trabalho para se tornar reproduzível em salas de aula. Os passos executados já são viáveis para a reprodução, mas para que os experimentos realizados sejam traduzidos em atividades de ensino é necessário um material mais robusto. Assim, uma perspectiva futura para esse trabalho é que ele possa originar roteiros experimentais e sequências didáticas passíveis de serem aplicados em salas de aula para o ensino de Física, com a vantagem de que nesse trabalho o comparativo experimental e teórico já foi realizado e obteve resultados positivos, demonstrando a viabilidade da realização desse processo de verificação experimental.

REFERÊNCIAS

- BARROS, L.; CAVALCANTE, M.; SOLEDADE, P.; SBRISSA NETO, D. A.; SIQUEIRA, M. **Oscilador harmônico simples, série e transformada de Fourier e operador de Sturm-Liouville – uma breve discussão.** Revista Brasileira de Ensino de Física, 2023.
- BONVENTI JR., W.; ARANHA, N. **Estudo das oscilações amortecidas de um pêndulo físico com o auxílio do “Tracker”.** Revista Brasileira de Ensino de Física, 2015.
- BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular.** Brasília, 2018.
- CONCEIÇÃO, O.; LEYVA-CRUZ, J.; MILTÃO, M. S. R. **Experimento do sistema massa-mola vertical usando Arduino.** Caderno de Física da UEFS, Feira de Santana, 2020.
- DAVID, E.; DAN, M.; RODRIGUES JUNIOR, E. **Sinais vibracionais de pêndulo com Arduino: análise com transformada rápida de Fourier.** Revista Eletrônica Científica Ensino Interdisciplinar, Mossoró, 2022.
- DIAS, R. **Sequência investigativa do pêndulo simples via Arduino e phyphox aplicada no ensino remoto.** Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2023.
- HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; E. WALKER, J. **Fundamentos da Física: Mecânica v.1.** Rio de Janeiro, 2013.
- MARTINS, M. L.; MAGALHÃES JÚNIOR, P. A. A.; SILVA, G. C. da; ALMEIDA, V. C., MARTINS, N., MACIEL, D. de C.; CAMPOS, T. R. **Análise da aplicação da FFT (Fast Fourier Transform) no diagnóstico de falha em máquinas rotativas.** Revista Interdisciplinar de Pesquisa em Engenharia, 2017.
- NUSSENZVEIG, H. M. **Curso de Física básica: Fluidos, oscilações e ondas, calor.** 5ª edição, São Paulo, 2014.
- OLIVEIRA, J.C; PINTO, R.C.; OLIVEIRA, T.F.; SOUZA, C. **Solução teórica para o período do pêndulo simples não-linear e aferição experimental utilizando o Arduino.** Revista Brasileira de Física, 2024.
- SANTOS, E.J. **Método científico: uma introdução.** Recife, 2018.
- SOUZA, A. R. de; PAIXÃO, A. C.; UZÊDA, D. D.; DIAS, M. A.; DUARTE, S.; AMORIM, H. S. de. **A placa Arduino: uma opção de baixo custo para experiências de Física assistidas pelo PC.** Revista Brasileira de Ensino de Física, 2011.

TAKAHASHI, E.K.; CARDOSO, D.C. **Experimentação remota em atividades de ensino formal: um estudo a partir de periódicos Qualis A.** Revista Brasileira de Pesquisa em Educação em Ciências, 2012.

APÊNDICE A - CÓDIGO DO ARDUINO

```
1  #include <SPI.h>
2  #include <SD.h>
3
4  #define TRIG_PIN 5
5  #define ECHO_PIN 4
6  #define SD_SS 10
7
8  File myFile;
9
10 const unsigned long INTERVALO = 50000;
11 unsigned long ultimoTempo = 0;
12
13 void setup() {
14     pinMode(TRIG_PIN, OUTPUT);
15     pinMode(ECHO_PIN, INPUT);
16     digitalWrite(TRIG_PIN, LOW);
17
18     SD.begin(SD_SS);
19
20     myFile = SD.open("dados.txt", FILE_WRITE);
21     if (myFile) {
22         myFile.println("tempo_us\t distancia_cm");
23         myFile.close();
24     }
25 }
26
27 void loop() {
28     unsigned long agora = micros();
29
30     if (agora - ultimoTempo >= INTERVALO) {
31         ultimoTempo = agora;
32
33         unsigned long tempoEco;
34         float distancia = medirDistancia(tempoEco);
35
36         myFile = SD.open("dados.txt", FILE_WRITE);
37         if (myFile) {
38             myFile.print(tempoEco);
39             myFile.print("\t");
40             myFile.println(distancia);
41             myFile.close();
```

```
42     }
43   }
44 }
45
46 float medirDistancia(unsigned long &tempoEco) {
47   digitalWrite(TRIG_PIN, HIGH);
48   delayMicroseconds(10);
49   digitalWrite(TRIG_PIN, LOW);
50
51   unsigned long inicio = micros();
52   unsigned long eco = pulseIn(ECHO_PIN, HIGH, 30000);
53
54   if (eco == 0) {
55     tempoEco = inicio;
56     return 0;
57   }
58
59   tempoEco = inicio + eco;
60   return eco * 0.034 / 2.0;
61 }
```