



**INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO SERTÃO
PERNAMBUCANO
CAMPUS SERRA TALHADA**

ANDERSON DA SILVA ANDRADE

**SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE CAMPO DE EINSTEIN: MÉTRICA DE
SCHWARSZCHILD**

SERRA TALHADA
2022

ANDERSON DA SILVA ANDRADE

**SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE CAMPO DE EINSTEIN: MÉTRICA DE
SCHWARSZCHILD**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do curso de Licenciatura em Física do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Sertão Pernambucano, Campus Serra Talhada, como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado em Física.

Orientador
Prof. Dr. Aléssio Tony Batista Celeste

SERRA TALHADA
2022

A554 Andrade, Anderson da Silva.

Solução da equação de campo de Einstein: Métrica de Schwarzschild / Anderson da Silva Andrade. - Serra Talhada, 2022.
45 f. : il.

Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Física) -Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Sertão Pernambucano, Campus Serra Talhada, 2022.

Orientação: Prof. Dr. Alessio Tony Batista Celeste.

1. Física Moderna. 2. Schwarzschild. 3. Métrica. 4. Buracos negros. I. Título.

CDD 539

ADERSON DA SILVA ANDRADE

**SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE CAMPO DE EINSTEIN: MÉTRICA DE
SCHWARSZCHILD**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do curso de Licenciatura em Física do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Sertão Pernambucano, Campus Serra Talhada, como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado em Física.

Aprovado em: 30/06/2022.

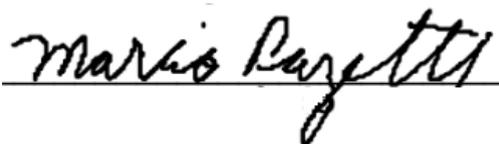
BANCA EXAMINADORA



Prof. Dr. Aléssio Tony Batista Celeste
IFSertãoPE – Campus Serra Talhada
Examinador Interno



Prof. Dr. Victor Hugo de Holanda Cavalcanti
IFSertãoPE – Campus Serra Talhada
Examinador Interno



Prof. Dr. Marcio Pazetti
UNIVAST - Campus Juazeiro
Examinador Externo

DEDICATÓRIA

Dedico todo o esforço que depositei neste trabalho ao meu amigo, companheiro e irmão Willian Simões (in memoriam), que sempre me apoiou para seguir em frente e conquistar meus objetivos.

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais, madrasta, irmãos, tios e avó, que me incentivaram nos momentos difíceis e compreenderam a minha ausência enquanto eu me dedicava em busca dos meus objetivos.

Aos amigos, que sempre estiveram ao meu lado, pela amizade incondicional e pelo apoio demonstrado ao longo de todo o período de tempo de dedicação.

Aos professores no qual fui aluno, desde as séries iniciais até a graduação. Em especial ao professor Arimatéa Fidelis que contribuiu significativamente quando mais precisei.

Ao meu orientador Aléssio Tony Batista Celeste pelo auxílio na execução deste trabalho, por contribuir significativamente para minha formação e pela confiança depositada na minha pessoa.

À instituição de ensino IFSertãoPE, essencial no meu processo de formação profissional, pela dedicação, e por tudo o que aprendi ao longo dos anos no curso.

RESUMO

Esse trabalho tem o intuito de realizar um estudo da famosa solução de Karl Schwarzschild nas equações de campo da relatividade geral de Einstein. Essa solução obtida por Schwarzschild em 1916 é a única solução exata da Teoria da Relatividade Geral de reconhecida aplicabilidade prática. Schwarzschild apresentou ao mundo a primeira solução analítica para as equações de campo de Einstein, para além de ser possível, confirmar a teoria da Relatividade Geral de como uma teoria de Gravitação de corpo científico, prevê a previsão correta do avanço anual do periélio do planeta Mercúrio e ainda assim a existência de um dos objetos astrofísicos mais exóticos do universo: os buracos negros.

Palavras-chave: Schwarzschild; métrica; buracos negros.

ABSTRACT

This work aims to carry out a study of Karl Schwarzschild famous solution in Einstein general relativity field equations. This solution obtained by Schwarzschild in 1916 is the only exact solution of the Theory of General Relativity of recognized practical applicability. Schwarzschild presented to the world the first analytical solution for Einstein field equations, besides being possible, confirming the theory of General Relativity as a theory of scientific body gravitation, predicts the correct prediction of the annual advance of the perihelium of the planet Mercury and yet the existence of one of the most exotic astrophysical objects in the universe: black holes.

Key-words: Schwarzschild; metric; black holes.

SUMÁRIO

| | | |
|--------|---|----|
| 1. | INTRODUÇÃO..... | 10 |
| 2. | REFERENCIAL TEÓRICO..... | 11 |
| 2.1. | Métrica no espaço-tempo..... | 11 |
| 2.2. | Tensores na Relatividade Geral..... | 13 |
| 2.3. | Equações de campo de Einstein..... | 14 |
| 2.4. | Cone de luz..... | 15 |
| 2.5. | Buraco negro..... | 17 |
| 3. | RESULTADOS E DISCUSSÕES..... | 20 |
| 3.1. | Solução de Schwarzschild..... | 20 |
| 3.2. | Implicações da solução de Schwarzschild..... | 23 |
| 3.2.1. | Buraco negro de Schwarzschild..... | 23 |
| 3.2.2. | Feixe de luz emitido por um observador distante da fonte gravitacional..... | 26 |
| 3.2.3. | Feixe de luz emitido por um observador que se aproxima da fonte gravitacional, distante de um segundo observador..... | 27 |
| 3.2.4. | Colapso ao centro do buraco negro..... | 28 |
| 3.2.5. | Partículas na região interior ao horizonte de eventos..... | 29 |
| 4. | CONCLUSÕES..... | 30 |
| | REFERÊNCIAS..... | 32 |
| | APÊNDICE A - COMPONENTES DO SÍMBOLO DE CHRISTOFFEL..... | 34 |
| | APÊNDICE B - COMPONENTES DO TENSOR DE RICCI..... | 36 |
| | ANEXO A - TENSORES GERAIS..... | 42 |
| | ANEXO B - DERIVADA COVARIANTE..... | 42 |
| | ANEXO C - TENSOR DE RIEMANN..... | 43 |
| | ANEXO D - TENSOR DE RICCI..... | 44 |
| | ANEXO E - TENSOR DE EINSTEIN..... | 44 |
| | ANEXO F - TENSOR ENERGIA-MOMENTO..... | 45 |

1. INTRODUÇÃO

Albert Einstein terminou a formulação de sua teoria de gravitação, a Teoria da Relatividade Geral (TRG), em novembro de 1915. O astrofísico alemão Karl Schwarzschild leu o artigo de Einstein sobre a TRG que foi publicado numa revista científica. Imediatamente, Schwarzschild pôs-se a calcular as consequências da teoria para a gravitação causada por uma estrela isolada. Para o espaço exterior a uma distribuição esférica e estática de massa M , Schwarzschild obteve então a primeira solução exata da seguinte equação:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}, \quad (1)$$

que é a equação de campo de Einstein [1]. Em que $R_{\mu\nu}$ e R são, respectivamente, o tensor e o escalar de Ricci, $g_{\mu\nu}$ é a métrica para o espaço-tempo curvo, G é a constante gravitacional, c é a velocidade da luz e $T_{\mu\nu}$ é o tensor de energia-momento.

A solução de Schwarzschild foi a primeira solução exata das equações de campo de Einstein e descreve o comportamento e a deformação do espaço-tempo devido uma distribuição de matéria e energia estática, sem carga e com simetria esférica. Tal solução nos aponta matematicamente para a existência de buracos negros. Schwarzschild enviou os seus resultados a Einstein que admirou-se do feito, ele mesmo (Einstein) não acreditava ser possível chegar a uma solução analítica e exata de suas equações dadas as enormes complexidades matemáticas envolvidas. Schwarzschild teve a engenhosidade de escolher um sistema simples, de alta simetria, para empreender a primeira e mais notável solução particular da TRG. No limite de campo fraco a solução de Schwarzschild se reduz à lei de gravitação de Newton [5].

A solução externa de Schwarzschild permanece, até hoje, como a mais importante solução exata das equações de campo de Einstein, dada a sua vasta aplicabilidade em sistemas, conforme Rindler [21, p. 228]. As aplicações mais conhecidas são o cálculo de órbitas planetárias em campos gravitacionais fortes, sendo a previsão correta do avanço anual do periélio de Mercúrio o exemplo mais conhecido, o cálculo do encurvamento da trajetória da luz ao passar nas proximidades de corpos de grande massa, o cálculo do desvio para o vermelho

gravitacional, etc. Não se pode deixar de mencionar ainda um grande e novo campo de pesquisa aberto, com a consideração dos objetos denominados buracos negros. Estes surgem como estruturas limites da métrica de Schwarzschild.

A solução de Schwarzschild das equações gerais da gravitação de Einstein para o espaço exterior a uma massa M , esférica e estática será daqui para frente denominada gravitação de Schwarzschild em contraposição à gravitação de Newton, a qual é o limite da gravitação de Schwarzschild para grandes distâncias da massa M (região de campo fraco). O grande prestígio de que goza a TRG provém fundamentalmente da gravitação de Schwarzschild, que às vezes, de forma equivocada, é confundida com a própria TRG. A métrica de Schwarzschild torna-se a métrica de Minkowski, i.e., a métrica do espaço-tempo plano da Teoria da Relatividade Restrita (TRR) de Einstein, para distâncias infinitamente grandes da massa M .

O objetivo principal deste trabalho é encontrar a solução da equação de campo de Einstein da Relatividade Geral através da métrica de Schwarzschild, interpretar algumas implicações sujeitas por esta solução, e fazer um estudo aprofundado sobre teorias físicas no campo da cosmologia e teoria quântica de campos.

2. REFERENCIAL TEÓRICO

2.1. Métrica no espaço-tempo

A métrica é o instrumento matemático que exprime as propriedades geométricas do espaço-tempo, permitindo-nos calcular distâncias entre acontecimentos. Um espaço-tempo curvo é aquele cuja métrica se desvia da métrica de Minkowski. A forma específica da métrica depende da nossa escolha de coordenadas e referencial utilizado quando fazemos uma medição [6].

O espaço-tempo da TRR é plano, também chamado euclidiano, e a sua métrica é denominada métrica de Minkowski. A métrica de Minkowski, em coordenadas cartesianas, caracterizando-o como um espaço plano, é dada pela distância infinitesimal ds entre dois eventos localizados em (t, x, y, z) e $(t + dt, x + dx, y + dy, z + dz)$:

$$ds^2 = (cdt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2, \quad (2)$$

onde c é a velocidade da luz no vácuo.

Em coordenadas esféricas a métrica é escrita em termos de r , θ e φ da seguinte forma:

$$ds^2 = (cdt)^2 - (dr)^2 - (rd\theta)^2 - (r\text{sen}\theta d\varphi)^2. \quad (3)$$

De modo geral, a separação infinitesimal entre dois eventos em um determinado referencial pode ser expresso por:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (4)$$

onde $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3)$, em que x^0 é a coordenada temporal e x^1 , x^2 e x^3 são coordenadas espaciais.

As métricas descritas acima também podem ser escritas em forma matricial e, neste caso, temos os chamados tensores da métrica g . A métrica em coordenadas cartesianas toma a seguinte configuração:

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} & g_{03} \\ g_{10} & g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{20} & g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{30} & g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (5)$$

e, em coordenadas esféricas, a métrica pode ser escrita na seguinte forma:

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} & g_{03} \\ g_{10} & g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{20} & g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{30} & g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \text{Sin}^2\theta \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Os índices μ e ν tomam os valores 0, 1, 2 e 3 correspondendo à coordenada temporal e às três coordenadas espaciais. Como pode ser visto nas duas últimas equações acima, o tensor da métrica de Minkowski só possui os termos da diagonal principal, o que significa que o tempo e o espaço são isotrópicos, os eixos coordenados são idênticos em qualquer direção, e homogêneos, os eixos são idênticos em qualquer ponto do espaço-tempo.

As métricas da TRG caracterizam espaços-tempo curvos [1]. A métrica de Schwarzschild caracteriza o espaço-tempo curvo, é a métrica correspondente ao espaço exterior a uma distribuição esférica de massa, sem rotação. O Sol, e muitas outras estrelas e planetas, podem ser aproximados por uma distribuição como esta.

2.2. Tensores na Relatividade Geral

As leis físicas devem ser independentes do sistema de coordenadas empregado, as equações matemáticas que expressam essas leis devem ser covariantes, isto é, invariantes na sua forma sob transformações de coordenadas. Os tensores são entes matemáticos que podem ser definidos em relação a todo sistema de coordenadas, sendo a definição feita por um certo número de funções espaciais, chamadas de componentes de um tensor.

Alguns tensores são essenciais para compreendermos um pouco mais sobre a matemática na Relatividade Geral. Para tanto, com base nas referências [8] e [23], na seção de anexos discuto muito mais sobre tensores, dentre eles: Tensores gerais; Derivada covariante; Tensor de Riemann; Tensor de Ricci; Tensor de Einstein; Tensor energia-momento.

2.3. Equações de campo de Einstein

As equações de campo de Einstein da TRG representam uma descrição matemática de uma entidade geométrica, o espaço-tempo, definido por três coordenadas espaciais e uma temporal. Esta entidade de 4 dimensões é estabelecida pelo conteúdo de energia e matéria existentes. Do lado esquerdo das equações temos a descrição geométrica do espaço-tempo e do lado direito, o conteúdo de energia e momento. Colocado de outra forma, a TRG é a teoria da gravitação de Einstein. Ela pode ser entendida simplificada pela afirmação de que *“o espaço-tempo diz à matéria como se mover e a matéria diz ao espaço-tempo como se curvar”* [13]. Esta é obviamente uma afirmação incompleta pois não só a matéria curva o espaço-tempo mas também toda forma de energia [12].

Einstein utiliza o formalismo tensorial para expressar as suas equações de campo, e neste sentido, a TRG é uma teoria tensorial. A propósito, o matemático alemão Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866) foi um dos principais responsáveis pelo desenvolvimento do cálculo tensorial, tendo importância enorme para a formulação da TRG.

Um tensor é uma entidade matemática que possui em cada ponto do espaço n^m componentes, onde n é o número de dimensões do espaço e m é a ordem do tensor. Desta forma, podemos dizer que o escalar é um tensor de ordem 0, portanto, tem 1 componente, e o vetor é um tensor de ordem 1, tem n componentes. Os

tensores utilizados na TRG são tensores de ordem $m=0, 1$ e 2 e o espaço é o espaço-tempo de $n=4$ dimensões (três coordenadas espaciais e uma coordenada temporal). Assim, os tensores de segunda ordem da TRG têm, em princípio, $4^2=16$ componentes. Dizemos “em princípio” porque os problemas físicos reais impõem restrições de simetria que reduzem para 10 , as componentes realmente necessárias. Os tensores de primeira ordem são os vetores da TRG, chamados de quadrivetores e possuem 4 componentes.

As equações de Einstein da TRG podem ser expressas de forma qualitativa como:

$$\text{curvatura do espaço-tempo} = \text{constante} \times \text{matéria-energia.} \quad (29)$$

A curvatura do espaço-tempo é dada, matematicamente, pela relação que se encontra no lado esquerdo da equação (1), esse termo é designado como tensor de Einstein ($G_{\mu\nu}$), em que os índices μ e ν assumem os valores de $0, 1, 2$ e 3 [8].

O tensor $R_{\mu\nu}$, na equação (1) é formado a partir do tensor de curvatura de Riemann, o qual é um tensor de ordem 4 , sendo a maneira mais geral de se descrever a curvatura de um espaço de n dimensões qualquer. No caso da TRG, o espaço-tempo de 4 dimensões implica na existência de $4^4=256$ componentes. O tensor de Ricci, de ordem 2 , é a forma reduzida do tensor de Riemann para ser usada nas equações de Einstein. A forma reduzida é obtida através da aplicação de relações de simetria que eliminam os termos redundantes no tensor de Riemann.

O tensor $g_{\mu\nu}$ na mesma equação, tem o papel do campo. E é por isto que dizemos “equações de campo de Einstein”. Não falamos, na TRG, em “ação à distância”, um corpo de prova não “sente” diretamente as fontes de matéria e energia, mas sim o campo, i.e., a métrica que estas fontes geram em sua vizinhança. O campo de métrica transmite as perturbações na geometria (ondas gravitacionais) na velocidade da luz, uma situação análoga ao que ocorre no eletromagnetismo [2]. O campo da métrica é o análogo ao campo gravitacional na teoria newtoniana.

O termo R , é a curvatura escalar, um escalar associado ao tensor de Ricci e ao tensor da métrica. Em termos tensoriais, a curvatura escalar é igual ao traço do tensor de Ricci com relação ao tensor da métrica. A curvatura escalar é também chamada de escalar de Ricci.

Já o lado direito da equação (1) é caracterizado pelo tensor de energia-momento $T_{\mu\nu}$, e é esse termo que descreve a dinâmica energética do espaço-tempo, conforme é descrito na seção anterior (2.2.6.).

Com isso, temos a forma explícita das 16 equações de Einstein. Em formato matricial, podemos representar pela seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} R_{00} & R_{01} & R_{02} & R_{03} \\ R_{10} & R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{20} & R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{30} & R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} & g_{03} \\ g_{10} & g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{20} & g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{30} & g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix} R = \frac{8\pi G}{c^4} \begin{bmatrix} T_{00} & T_{01} & T_{02} & T_{03} \\ T_{10} & T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{20} & T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{30} & T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix}.$$

(30)

As equações da TRG no vácuo são em grande maneira, responsáveis pelo prestígio extraordinário de que goza a TRG. As equações no vácuo são aquelas válidas para o campo da métrica no vácuo, por exemplo, o campo em torno do Sol, para o qual a densidade de matéria é $\rho=0$. Estudando as simetrias do tensor de Ricci ($R_{\mu\nu}$), no limite clássico do tensor da métrica $g_{\mu\nu}$, Einstein postula a seguinte forma para as equações de campo no vácuo:

$$R_{\mu\nu} = 0. \quad (31)$$

Einstein propôs as equações da TRG para o vácuo em 1915 [1], e em 1916 Schwarzschild obteve a primeira e a mais importante solução exata das equações de campo do vácuo, conhecida como métrica de Schwarzschild [9, p. 68].

2.4. Cone de luz

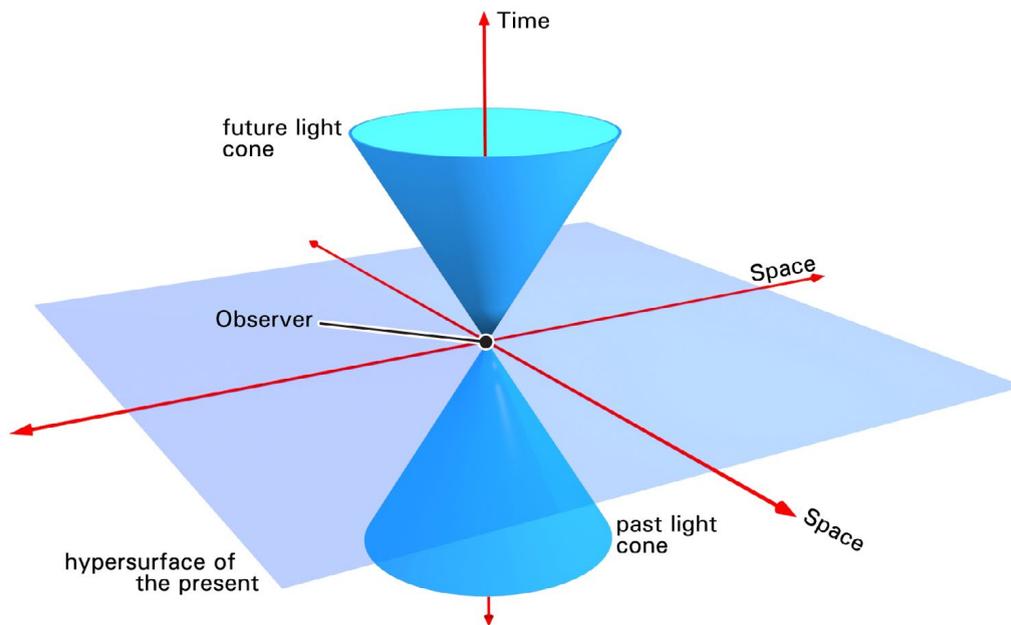
O espaço-tempo na TRG é constituído por uma coordenada temporal e três coordenadas espaciais: t , x , y e z . Através dessas coordenadas é possível saber o que aconteceu e em que momento aconteceu (hora do evento), ainda acontecerá ou está acontecendo. Um ponto dentro do continuum espaço-tempo é mais que um simples ponto, é um acontecimento dentro de uma grande malha de pontos. Esses pontos são designados como eventos [14].

O cone de luz tem um papel essencial em estabelecer a relação existente entre a causa e o efeito de um determinado evento. Esta representação nos diz respeito ao passado, presente e futuro de um evento. Na relatividade geral e especial, um cone de luz é o caminho que um flash de luz, emanando de um único evento, viajando em todas as direções, percorre através do espaço-tempo [18].

Quando uma fonte emite um pulso de luz de um ponto específico no espaço e em um determinado instante no tempo, a luz se espalha, adquirindo a configuração geométrica de uma esfera imaginária cujo tamanho e posição são completamente independentes da velocidade da fonte. Com o passar do tempo, a luz se espalha, de modo que o diâmetro dessa esfera imaginária se expande.

Uma representação esquemática de um cone de luz pode ser vista na figura 1. Nesta representação, o passado de um evento está situado na parte inferior do cone, abaixo do plano. O presente está representado por um ponto no plano que separa a região superior e inferior do cone de luz. O futuro pode ser visualizado na parte superior do cone, conforme uma evolução temporal. Cada evento no Universo tem um cone de luz associado.

Figura 1 - Esquema do cone de luz



Fonte: (ROBERTO, RHEINLANDER, 2017)

Quando falamos em uma separação no espaço-tempo, nos referimos a um evento que pode estar localizado na região interna, na borda ou região externa ao cone. Dizemos ser uma separação tipo tempo ($ds^2 < 0$) aquela que ocorre dentro do cone luz. Uma separação do tipo nulo ou tipo luz ($ds^2 = 0$), ocorre na borda do cone. E uma separação tipo espaço ($ds^2 > 0$) está fora do cone de luz, e portanto essa separação não tem uma causalidade com a região interna do cone de luz [10].

Todos os corpos com massa não nula seguem trajetórias causais, o que chamamos de “linhas de mundo”, contidas dentro do cone de luz. Na Relatividade

Geral, quando um corpo (inclusive o fóton) está na vizinhança de um buraco negro de Schwarzschild, por exemplo, o seu cone de luz é deformado pela gravidade. Ao cruzar o horizonte de eventos, a gravidade causa uma modificação dramática: o cone de luz está deitado na direção radial indicando que o eixo temporal agora está na direção espacial, haverá uma inversão nas coordenadas temporal e espacial. Fisicamente isto significa que é inevitável a queda deste corpo até o centro do buraco negro.

2.5. Buraco negro

A existência de buracos negros era uma possibilidade quase acadêmica desde o final do Século XVIII, quando o astrônomo John Michell e o matemático Pierre-Simon Laplace conceberam a idéia de uma “estrela negra”, cuja massa era tão grande e tão concentrada que nem a luz seria capaz de escapar. Os buracos negros voltaram com força na Física do começo do Século XX quando Einstein propôs a TRG, e logo em seguida Schwarzschild encontra uma solução exata das equações de Einstein e aponta para a existência de buracos negros [4]. Essa discussão é o principal objetivo neste trabalho.

Em um artigo enviado em 1783 para a Philosophical Transactions da Royal Society [16], Michell argumentou que corpos com um raio 500 vezes superior ao do Sol e com uma densidade igual ou superior à deste não deixariam, em virtude da sua atração gravitacional, os seus próprios raios de luz escaparem, sendo assim invisíveis aos nossos sentidos.

Michell pensou em termos de velocidade de escape que é tanto maior quanto maior for a massa do corpo (planeta, estrela, lua, etc...) e tanto maior quanto menor for o respectivo raio. Embora no caso da Terra o seu valor seja de apenas 11 km/s, numa estrela de nêutrons pode atingir $1,5 \times 10^5$ km/s. Trabalhando com os valores do raio e da massa, podemos imaginar, assim como Michell, uma estrela cuja velocidade de escape seja superior à da luz. Essa estrela não seria visível por um observador distante.

Esta foi uma espectacular previsão de uma das propriedades dos buracos negros: aprisionar a luz e ser invisível. Todavia estas estrelas escuras não correspondem exatamente à definição atual de buraco negro. Um corpo capaz de

aprisionar a sua própria luz não pode ser descrito pela teoria da gravitação de Newton [15], mas sim pela TRG como iremos demonstrar logo mais.

Algumas provas experimentais da TRG foram surgindo com o decorrer dos anos. Um eclipse total do Sol (1919) permitiu confirmar que este desvia os raios de luz provenientes de estrelas distantes e que, além disso, o ângulo de desvio estava de acordo com o previsto. O avanço do periélio do planeta Mercúrio é outra prova experimental da TRG. A descoberta de imagens múltiplas de um quasar (1980) veio validar a previsão da existência de lentes gravitacionais avançadas por Einstein.

Pouco tempo decorrido após a publicação da TRG, Karl Schwarzschild chegou, baseando-se na mesma, à solução para o campo gravítico em torno de uma massa esférica. Este resultado permitiu descrever o campo em torno de estrelas como o Sol ou ainda em torno de estrelas mais compactas como as anãs brancas e estrelas de nêutrons em relação às quais os efeitos relativistas são mais relevantes. O que não ficou imediatamente evidente é que essa solução comportava também a descrição de um objeto bem mais exótico: o buraco negro.

Os buracos negros são objetos previstos pela TRG. No entanto, eram objetos de tal forma fora do comum que, na falta de qualquer evidência da sua existência, o seu estudo não foi muito motivador ao longo de muitos anos. Apenas a descoberta de outros objetos exóticos como os quasares, em 1963, e as estrelas de neutrons em 1967, veio reavivar o entusiasmo e o interesse pelo estudo dos buracos negros.

Desde então têm sido identificados vários candidatos a buraco negro. Em termos de massas solares (M_s), estes vão desde os buracos negros estelares $1-10^2 M_s$, espalhados pela nossa galáxia, até aos super buracos negros $10^6-10^{10} M_s$, presentes nos núcleos de algumas galáxias, incluindo a nossa. Toda esta seleção de candidatos é feita a partir de observações indiretas.

Porém, durante muitas décadas os buracos negros permaneceram como uma noção mais acadêmica: não era claro que o nosso universo jamais formaria um desses objetos. A questão de detectar a existência de buracos negros em observações era ainda mais reservada à literatura de ficção científica.

Isso tudo começou a mudar quando o físico, matemático e filósofo da Universidade de Oxford, Sir Robert Penrose, em 1965 [20], demonstrou a inevitabilidade da formação de um buraco negro a partir de uma distribuição normal de matéria. A maneira como Penrose mostrou esse resultado foi extremamente

engenhosa e elegante, por meio do uso da noção dos cones de luz e sua extensão em termos de superfícies aprisionadas. Esses trabalhos mostraram ao mundo que buracos negros não eram apenas uma possibilidade: eram inevitáveis. Por essa descoberta, Penrose recebeu metade do prêmio Nobel de Física de 2020.

Designa-se buraco negro, uma região do espaço-tempo em que o campo gravitacional é tão intenso que nada, nenhuma partícula ou radiação eletromagnética como a luz, pode escapar. A TRG prevê que uma massa suficientemente compacta pode deformar o espaço-tempo para formar um buraco negro. O limite da região da qual não é possível escapar é chamado de horizonte de eventos. Embora o horizonte de eventos tenha um efeito enorme sobre o destino e as circunstâncias de um objeto que o atravessa, não tem nenhuma característica local detectável [18].

De muitas maneiras, um buraco negro age como um corpo negro ideal, pois não reflete luz. Além disso, a teoria quântica de campos no espaço-tempo curvo prevê que os horizontes de eventos emitem radiação Hawking [21], com o mesmo espectro que um corpo negro de temperatura inversamente proporcional à sua massa. Essa temperatura é da ordem dos bilionésimos de um kelvin para buracos negros de massa estelar, o que a torna praticamente impossível de observar.

Haverá a formação de buracos negros de massa estelar quando estrelas muito massivas colapsam no final de seu ciclo de vida. Após a formação de um buraco negro, ele pode continuar a crescer absorvendo a massa do ambiente. Ao absorver outras estrelas e se fundir com outros buracos negros, buracos negros supermassivos de milhões de massas solares podem se formar. Há consenso de que existem buracos negros supermassivos no centro da maioria das galáxias.

A presença de um buraco negro pode ser inferida por meio da interação com outra matéria e com radiação eletromagnética, como a luz visível. A matéria que cai em um buraco negro pode formar um disco de acreção externa aquecido por fricção, formando alguns dos objetos mais brilhantes do universo. Se houver outras estrelas orbitando um buraco negro, suas órbitas podem ser usadas para determinar a massa e a localização do buraco negro.

3. RESULTADOS E DISCUSSÕES

3.1. Solução de Schwarzschild

Começaremos considerando um objeto estático e simetricamente esférico. A métrica tem a seguinte forma geral:

$$ds^2 = W(r)dt^2 - U(r)dr^2 - V(r)r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \quad (32)$$

onde as funções $W(r), U(r), V(r)$ nos diz respeito à curvatura espaço-tempo, devido à presença de uma fonte gravitacional. Para simplificar a notação, reescrevemos a equação anterior, de forma que

$$ds'^2 = W'(r')dt'^2 - U'(r')dr'^2 - r'^2(d\theta'^2 + \sin^2\theta' d\varphi'^2), \quad (33)$$

tal qual, sem perda de generalidade, substituímos o termo $V(r)r^2$ da equação (37) por r'^2 . Para tanto, omitirei o apóstrofo na equação para evitar de estar escrevendo equações carregadas. Mas isso é só questão de notação. Representamos o elemento de linha infinitesimal na seguinte forma:

$$ds^2 = W(r)dt^2 - U(r)dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \quad (34)$$

Vamos escolher uma família de soluções para $W(r)$ e $U(r)$, a escolha deve garantir que a coordenada tipo tempo continue sendo tipo tempo e a coordenada tipo espaço continue sendo do tipo espaço. Mas, quando fazemos a escolha de uma família de funções devemos também nos atentar quanto à positividade das funções em todo seu domínio e não ao fato de serem crescentes. As funções serão

$$W(r) = e^{\lambda(r)} \text{ e } U(r) = e^{\nu(r)}. \quad (35)$$

Ligeiramente, podemos substituir as equações anteriores no elemento de linha infinitesimal e expressar a equação geral, como segue:

$$ds^2 = e^{\lambda(r)} dt^2 - e^{\nu(r)} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \quad (36)$$

Podemos representar a métrica para o espaço-tempo em uma forma mais compacta e generalizada, tal qual $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$, e os elementos diferenciais da mesma são $dx^0 = dt$, $dx^1 = dr$, $dx^2 = d\theta$ e $dx^3 = d\varphi$, respectivamente. Essa forma compacta pode ser visualizada na forma matricial, como mostram as matrizes.

$$[g_{\mu\nu}] = \begin{bmatrix} e^{\lambda(r)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{\nu(r)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta \end{bmatrix} \quad [\partial_\mu] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \\ \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{\partial}{\partial \phi} \end{bmatrix}$$

(37)

Feita essas considerações, vamos partir para as equações de campo de movimento de Einstein, que pode ser visualizada sob sua forma geral, como

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} . \quad (1)$$

Em que, no lado esquerdo dessa equação temos os termos de curvatura do espaço-tempo e no lado direito temos o termo de energia-momento.

Mas, como estamos analisando a curvatura espaço-temporal de um corpo simetricamente esférico, estático e sem momento angular, o termo de energia-momento é zero ($T_{\mu\nu} = 0$ (38)). Logo, podemos reescrever a equação (1) e deixá-la com essa configuração:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 0 \Rightarrow R_{\mu\nu} = 0. \quad (39)$$

Para resolvermos essa equação, devemos ter domínio de como trabalhar com tensores e símbolos de Christoffel. O tensor mais utilizado é o tensor de Ricci, e esse tensor, incorpora os símbolos de Christoffel. O tensor de Ricci tem a seguinte forma

$$R_{\mu\nu} = \partial_\sigma \Gamma_{\mu\nu}^\sigma - \partial_\nu \Gamma_{\mu\sigma}^\sigma + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \Gamma_{\alpha\sigma}^\sigma - \Gamma_{\mu\sigma}^\alpha \Gamma_{\alpha\nu}^\sigma, \quad (40)$$

sendo que, de forma geral, os símbolos de Christoffel são representado por

$$\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \frac{1}{2}g^{\rho\beta}(\partial_\nu g_{\beta\mu} + \partial_\mu g_{\beta\nu} - \partial_\beta g_{\mu\nu}). \quad (41)$$

Maiores detalhes sobre como resolver a equação (39), partindo da equação (40) e encontrando os possíveis símbolos de Christoffel a partir da equação (41), pode ser visto em apêndice.

Conforme cálculos feitos no apêndice, chegamos no seguinte sistema de equações:

$$\frac{\lambda'(r)}{2} + \frac{\lambda^2(r)}{4} - \frac{\lambda'(r)v'(r)}{4} + \frac{\lambda'(r)}{r} = 0 \quad (81)$$

$$\frac{\lambda''(r)}{2} + \frac{\lambda^2(r)}{4} - \frac{\lambda'(r)v'(r)}{4} - \frac{v'(r)}{r} = 0 \quad (91)$$

$$(1 + \frac{r}{2}(\lambda'(r) - v'(r)))e^{-v(r)} - 1 = 0 \quad (101)$$

$$[(1 + \frac{r}{2}(\lambda'(r) - v'(r)))e^{-v(r)} - 1] \sin^2\theta = 0. \quad (111)$$

Trabalhando com as duas primeiras equações e simplificando, teremos:

$$\frac{\lambda'(r)}{r} + \frac{v'(r)}{r} = 0 \Rightarrow (\frac{\lambda(r)}{r} + \frac{v(r)}{r})' = 0.$$

Isso implica que

$$(\frac{\lambda(r)}{r} + \frac{v(r)}{r}) = \text{constante}. \quad (112)$$

Com isso, devemos levar em consideração que, quando $r \rightarrow \infty$, $\lambda(r) = v(r) = 0$, a métrica de Schwarzschild tende a métrica de Minkowski. Com isso, saímos do espaço-tempo curvo para um espaço-tempo plano, o espaço de Minkowski.

Logo, podemos notar que

$$\frac{\lambda(r)}{r} + \frac{v(r)}{r} = 0, \lambda(r) = -v(r). \quad (113)$$

Jogando a equação anterior na equação (106) e simplificando, teremos:

$$v(r) = -\lambda(r), (1 + \frac{r}{2}(\lambda'(r) - v'(r)))e^{-v(r)} - 1 = 0.$$

Podemos reorganizar a equação acima para encontrar

$$e^{\lambda(r)}(1 + r\lambda'(r)) - 1 = 0 \Rightarrow (re^{\lambda(r)})' = 1.$$

Isso implica que

$$e^{\lambda(r)} = 1 - \frac{c}{r} = e^{-v(r)}, \quad (114)$$

onde c é uma constante. Finalmente, essas são as equações que procurávamos.

Substituindo a equação anterior na equação geral da métrica, chegaremos em:

$$ds^2 = (1 - \frac{c}{r})dt^2 - \frac{1}{(1-\frac{c}{r})}dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (115)$$

Vamos recorrer à aproximação do campo fraco, no limite newtoniano, a constante c , da equação anterior toma a seguinte configuração: $C = 2\frac{GM}{c^2}$ (116). Onde G é a constante gravitacional, M é a massa do corpo celeste em questão e C é a velocidade da luz.

Reescrevendo a métrica, teremos:

$$ds^2 = (1 - 2\frac{GM}{c^2}\frac{1}{r})dt^2 - \frac{1}{(1-2\frac{GM}{c^2}\frac{1}{r})}dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (117)$$

Essa é a solução geral obtida por Schwarzschild. Em outras palavras, essa equação é o elemento de linha infinitesimal para um espaço quadrimensional curvado por um objeto de massa M , esfericamente simétrico e estático.

Esse resultado prevê a existência de buracos negros. É possível notar que existem duas singularidades, para $r = 0$ e $r = 2\frac{GM}{c^2}$. A primeira é uma singularidade física e a segunda é uma pseudo singularidade, isso quer dizer que podemos contornar essa segunda com uma parametrização (essa discussão e outras implicações, detalho na próxima seção).

3.2. Implicações da solução de Schwarzschild

3.2.1. Buraco negro de Schwarzschild

Uma das consequências da solução proposta por Schwarzschild, é a existência de um dos objetos mais exóticos de todo universo: os buracos negros. Defini-se como buraco negro, um corpo gravitacionalmente colapsado, um corpo que tenha toda sua extensão, e conseqüentemente sua massa, concentrada em uma região menor que seu raio gravitacional.

Na métrica encontrada, é possível observar que existem uma singularidade intrínseca à solução e uma pseudo singularidade.

$$ds^2 = \left(1 - 2\frac{GM}{c^2}\frac{1}{r}\right)dt^2 - \frac{1}{\left(1 - 2\frac{GM}{c^2}\frac{1}{r}\right)}dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (117)$$

Os elementos da métrica são g_{00} , g_{11} , g_{22} e g_{33} . Os elementos g_{00} e g_{11} são os dois primeiros elementos da métrica, correspondente a coordenada temporal e espacial, de modo que

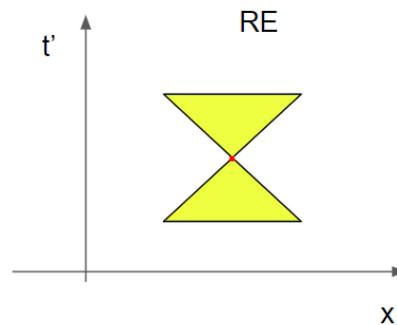
$$g_{00} = \left(1 - 2\frac{GM}{c^2}\frac{1}{r}\right) \quad (118) \quad \text{e} \quad g_{11} = \frac{1}{\left(1 - 2\frac{GM}{c^2}\frac{1}{r}\right)} \quad (119).$$

Uma das implicações mais importantes é que quando $r \rightarrow \infty$, a métrica de Schwarzschild se comporta como a métrica de Minkowski, equação (3). Uma vez que, quando nos distanciamos significativamente da fonte gravitacional, o espaço-tempo curvo se torna o espaço-tempo plano.

O termo $2\frac{GM}{c^2} = r_s$ (120) é designado como raio gravitacional ou raio de Schwarzschild. Apesar de tratar-se de uma pseudo singularidade, $r_s = 2\frac{GM}{c^2}$ delimita uma região de grande interesse físico, conhecida como horizonte de eventos.

Na TRE, um cone de luz associado a um evento pode ser visualizado como pode-se observar no diagrama abaixo.

Figura 2 - Cone de luz na RE

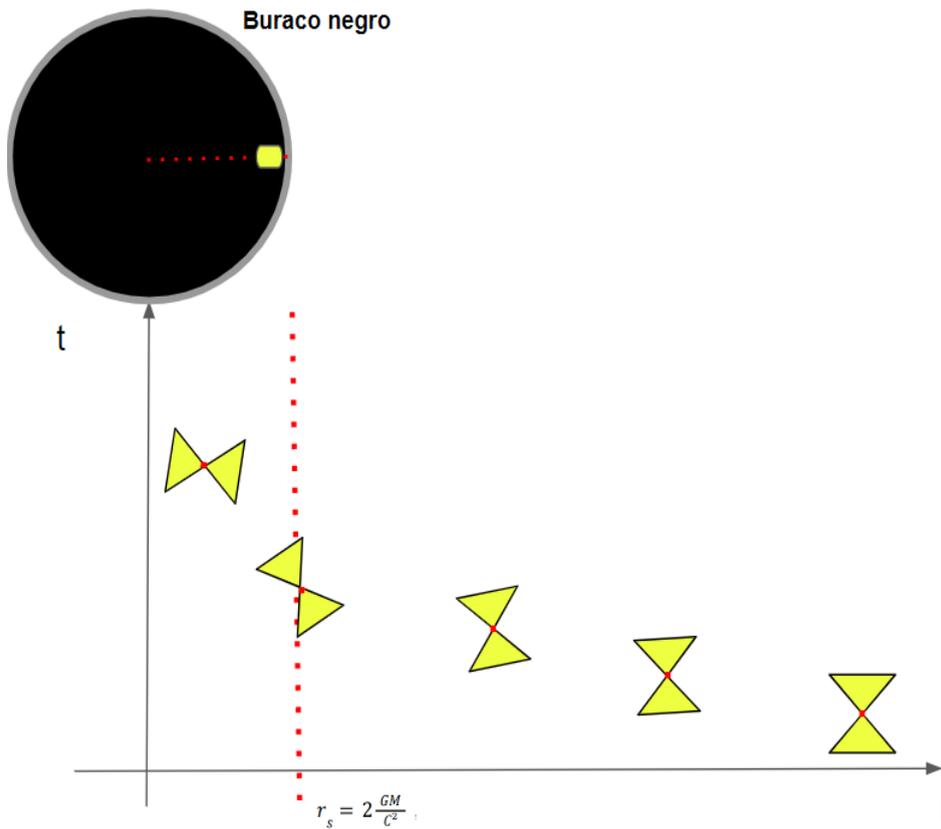


Fonte: Aatoria própria (2022)

Uma vez que, temos uma coordenada espacial (horizontal) e uma temporal (vertical). O ponto vermelho no centro, representa o presente deste evento, e a evolução do mesmo tem a velocidade da luz como limite. Digamos que o cone de luz acima representa o cone de luz para a luz. Com isso, vamos analisar o que ocorre quando a luz ultrapassa o horizonte de eventos, adentrando na região do buraco negro.

Abaixo, representamos em uma imagem a evolução de um cone de luz associado à luz a medida em que este se aproxima do buraco negro. Para fazer as analogias partimos da equação (117).

Figura 3 - Cone de luz associado à luz se aproximando do buraco negro



Fonte: Autoria própria (2022)

Observe que, quando $r \gg r_s$ o cone de luz tem o comportamento de um cone de luz na TRE, uma vez que estamos distante da fonte gravitacional. Portanto, caímos na métrica de Minkowski no espaço-tempo plano. A hora em que este cone de luz for se aproximando do buraco negro o espaço-tempo ficará cada vez mais curvo e este vai se “deitando” à medida em que $r \rightarrow r_s$.

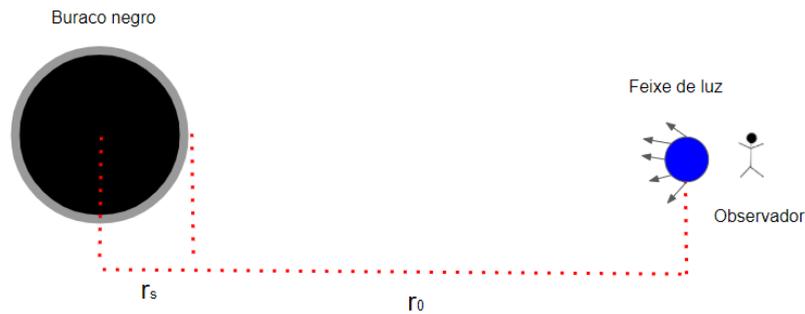
Se $r < r_s = 2 \frac{GM}{c^2}$, isso implica que haverá uma mudança nas coordenadas tipo tempo e tipo espaço. Em outras palavras, a coordenada tipo tempo inverte e vira uma coordenada do tipo espaço, e a coordenada tipo espaço inverte e vira uma do tipo tempo, isso porque haverá uma inversão no sinal da métrica, equação (117), de modo que $g_{00} < 0$ e $g_{11} > 0$.

Uma vez que as bordas deste evento diz respeito a evolução do mesmo (evolução para o futuro), agora estas bordas sempre estará apontando para dentro do buraco negro. Com isso, o universo de eventos acessíveis ao feixe de luz fica restrito à superfície gravitacional, de onde o feixe não mais escapa.

3.2.2. Feixe de luz emitido por um observador distante da fonte gravitacional

Suponhamos que um feixe de luz seja emitido por um observador distante de qualquer fonte gravitacional, localizado a um ponto r_0 no espaço. Este feixe se propaga em direção a um buraco negro, orientado sob a direção radial do mesmo, conforme mostra a figura abaixo.

Figura 4 - Feixe de luz emitido por um observador distante da fonte gravitacional



Fonte: Autoria própria (2022)

Para um feixe de luz, no cone de luz, a separação é do tipo nulo ou luz, de modo que $ds^2 = 0$. Teremos que

$$ds^2 = \left(1 - 2\frac{GM}{c^2}\frac{1}{r}\right)dt^2 - \frac{1}{\left(1 - 2\frac{GM}{c^2}\frac{1}{r}\right)}dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) = 0. \quad (121)$$

Reorganizando e simplificando a equação acima, é possível chegar na seguinte expressão

$$\frac{dr}{dt} = \pm \left(1 - 2\frac{GM}{c^2}\frac{1}{r}\right). \quad (122)$$

Analisaremos o caso em que $\frac{dr}{dt} = -\left(1 - 2\frac{GM}{c^2}\frac{1}{r}\right)$, tendo em vista que o feixe de luz se aproxima do buraco negro. Podemos organizar a equação anterior, de modo que

$$\int_{r_0}^r \frac{dr}{\left(1 - 2\frac{GM}{c^2}\frac{1}{r}\right)} = - \int_t^{t_0} dt. \quad (123)$$

Resolvendo a equação acima, é possível encontrar a seguinte solução:

$$\Delta t = r_0 - r + 2\frac{GM}{c^2} \ln\left[\frac{r_0 - r_s}{r - r_s}\right]. \quad (124)$$

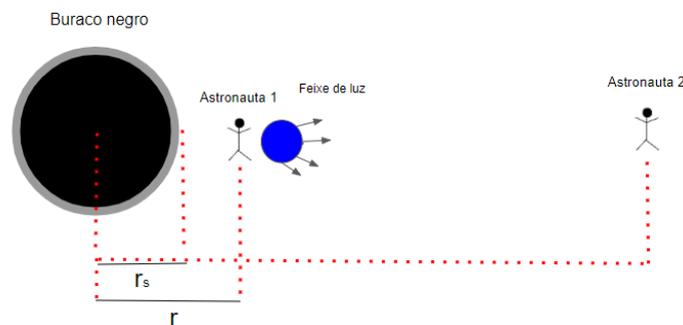
Sendo $r_s = 2\frac{GM}{c^2}$ e levamos em consideração que $r_s < r \leq r_0$. Se $r \rightarrow 2\frac{GM}{c^2}$, $\Delta t \rightarrow \infty$. Com isso, concluímos que um observador situado em r_0 , jamais irá visualizar o feixe de luz alcançar o raio gravitacional ou horizontes de eventos.

O cone de luz do feixe de luz é estreitado à medida que o mesmo se aproxima do horizonte de eventos. Quando $r = 2\frac{GM}{c^2}$, o universo de eventos acessíveis ao feixe de luz, fica restrito à superfície gravitacional, de onde o feixe não mais escapa.

3.2.3. Feixe de luz emitido por um observador que se aproxima da fonte gravitacional, distante de um segundo observador

Agora vamos supor um astronauta, próximo ao buraco negro, parado com relação ao mesmo, conforme a ilustração abaixo.

Figura 5 - Feixe de luz emitido por um observador que se aproxima da fonte gravitacional, distante de um segundo observador



Fonte: Autoria própria (2022)

Com o objetivo de enviar informações a um segundo observador distante, à medida que se aproxima do buraco negro, o astronauta faz pausas e emite um feixe de luz (sinal luminoso), repetindo o processo a cada um segundo, marcado em seu relógio.

O tempo próprio do astronauta 1 é

$$d\tau = \left(1 - 2\frac{GM}{c^2}\frac{1}{r}\right)^{\frac{1}{2}} dt. \quad (125)$$

Para o observador distante 2, o intervalo de tempo entre os sinais luminosos deve aumentar à medida que o astronauta 1 se aproxima da superfície gravitacional. O tempo marcado pelo astronauta 2 é

$$dt = \left(1 - 2\frac{GM}{c^2}\frac{1}{r}\right)^{-\frac{1}{2}} d\tau. \quad (126)$$

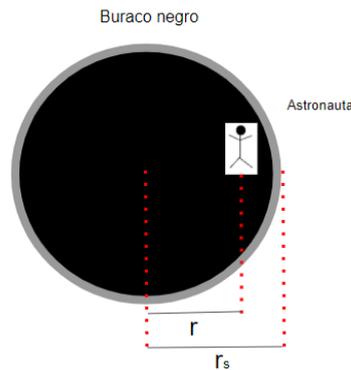
Notamos que, no limite de $r \rightarrow r_s = 2\frac{GM}{c^2}$, o astronauta 2 não mais verá os sinais luminosos, pois qualquer intervalo infinitesimal marcado pelo astronauta 1, representa uma infinidade temporal para o observador distante (dilatação temporal),

de forma que $\Delta t \rightarrow \infty$, não haverá uma relação causal entre os astronautas. Assistam ao filme INTERESTELAR!

3.2.4. Colapso ao centro do buraco negro

O astronauta, uma vez que atinge a superfície gravitacional, colapsa ao centro do buraco negro em tempo finito.

Figura 6 - Astronauta colapsando ao centro do buraco negro



Fonte: Autoria própria (2022)

Agora estamos analisando o que acontece quando $r < r_s = 2 \frac{GM}{c^2}$. Uma vez que adentrado na região do horizonte de eventos, os elementos da métrica sofrem uma inversão quanto a sua coordenada tipo e tempo e espacial, de modo que $g_{00} < 0$ e $g_{11} > 0$.

É possível observar que todos os elementos da métrica geral serão negativos, com exceção do segundo termo que será positivo, já que $r < r_s$,

$$ds^2 = \left(1 - 2 \frac{GM}{c^2} \frac{1}{r}\right) dt^2 - \frac{1}{\left(1 - 2 \frac{GM}{c^2} \frac{1}{r}\right)} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2).$$

Vamos analisar o segundo termo, já que se trata da coordenada temporal. Para que isto seja consistente,

$$ds^2 < - \frac{1}{\left(1 - 2 \frac{GM}{c^2} \frac{1}{r}\right)} dr^2. \quad (127)$$

Podemos escrever a equação anterior em termos da percepção temporal do astronauta dentro do buraco negro, de tal modo que

$$d\tau < \mp \frac{1}{\left(2 \frac{GM}{c^2} \frac{1}{r} - 1\right)^{\frac{1}{2}}} dr, \quad (128)$$

porém, analisaremos o termo negativo, pois o astronauta ruma ao centro do buraco negro. Para tanto, resolveremos a equação acima integrando em ambos os lados, de modo a termos

$$\Delta\tau = - \int_0^r \frac{1}{r_s \left(2 \frac{GM}{c^2} \frac{1}{r} - 1\right)^{\frac{1}{2}}} dr. \quad (129)$$

A solução da equação anterior é

$$\Delta\tau = \frac{GM\pi}{c^2}. \quad (130)$$

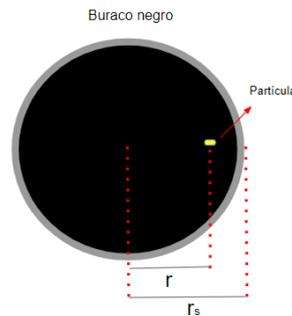
Esse é o tempo próprio que o astronauta leva para colapsar com o centro do buraco negro, tomada a sua percepção temporal, o colapso ocorre em tempo finito.

Uma observação é que não há nenhum tipo de transposição deste resultado a um observador externo à sua superfície gravitacional, uma vez que não existe relação causal entre as partes interna e externa ao buraco negro.

3.2.5. Partículas na região interior ao horizonte de eventos

Nessa etapa, discuto a implicação quanto ao que acontece com uma partícula, uma vez que a mesma adentra na região do horizonte de eventos.

Figura 7 - Partícula na região interior ao horizonte de eventos



Fonte: Autoria própria (2022)

Para tanto, vamos contornar a pseudo singularidade existente no segundo termo da métrica geral. Consideremos a seguinte transformação de coordenadas:

$$t' = t + 2 \frac{GM}{c^2} \ln\left(1 - \frac{r}{2 \frac{GM}{c^2}}\right). \quad (131)$$

Essa transformação é tal que contorna a pseudo singularidade na coordenada r do elemento de linha, como pode ser observado substituindo a equação anterior no elemento de linha, de modo a chegarmos na seguinte equação

$$ds^2 = \left(1 - 2 \frac{GM}{c^2} \frac{1}{r}\right) dt'^2 - \left(1 + 2 \frac{GM}{c^2} \frac{1}{r}\right) dr^2 - 4 \frac{GM}{c^2} \frac{1}{r} dr dt' - r^2 d\Omega^2. \quad (132)$$

Sendo que $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$ (133), conhecido como ângulo sólido.

Nota-se que, mesmo com a singularidade sendo contornada, ainda trata-se de uma região que, quando atravessada, a coordenada tipo tempo toma característica de coordenada tipo espaço.

Em se tratando de uma partícula, sua velocidade é menor que a velocidade da luz, isso implica que $ds^2 > 0$. Podemos reescrever a equação (132), de modo que

$$(1 - 2\frac{GM}{c^2}\frac{1}{r})dt'^2 - (1 + 2\frac{GM}{c^2}\frac{1}{r})dr^2 - 4\frac{GM}{c^2}\frac{1}{r}drdt' - r^2d\Omega^2 > 0.$$

Podemos “dividir” a expressão anterior por dt'^2 para chegarmos em

$$(1 - 2\frac{GM}{c^2}\frac{1}{r}) - (1 + 2\frac{GM}{c^2}\frac{1}{r})\frac{dr^2}{dt'^2} - 4\frac{GM}{c^2}\frac{1}{r}\frac{dr}{dt'} - r^2\frac{d\Omega^2}{dt'^2} > 0. \quad (134)$$

Com isso, é possível notar que, para que se garanta essa desigualdade, o único termo positivo nessa expressão é o terceiro termo, pois o primeiro, segundo e quarto termo sempre será negativo, levando em consideração que estamos numa região onde $r < r_s = 2\frac{GM}{c^2}$.

Contudo, para que o terceiro termo seja positivo, devemos levar em conta que $\frac{dr}{dt'} = v_r < 0$ (135). De fato, essa relação é a velocidade radial da partícula, e esta está rumando ao centro do buraco negro. Com esta análise podemos concluir que a partícula, dentro da região do horizonte de eventos, jamais estará em repouso e que a mesma sempre terá sentido ao centro da fonte gravitacional. Portanto, a partícula jamais escapará do horizonte de eventos, ficando claro que $r = 2\frac{GM}{c^2}$, demarca uma região de severas consequências físicas, tais quais, a não causalidade entre a região interna e externa ao buraco negro.

4. CONCLUSÕES

Foi possível alcançar nossos objetivos traçados no início deste trabalho. Uma vez que fizemos um estudo mais aprofundado sobre algumas teorias físicas que possivelmente veremos em conteúdos no mestrado, como por exemplo teorias na área da Relatividade Geral, Cosmologia e Teoria Quântica de Campos.

Chegamos à famosa solução obtida por Schwarzschild, ao resolver a equação de campo de Einstein, que nem mesmo o próprio Einstein acreditava ter uma solução para essa equação.

Fizemos um tratado abstrato, no campo da Física matemática, ao resolvermos essas equações, que por sua vez, as soluções são extensas e requer muita cautela para não cometer equívocos e comprometer os resultados finais.

Mostramos que a métrica de Schwarzschild, tem a assinatura da métrica de Minkowski quando se distanciamos cada vez mais da fonte gravitacional em questão, e isso implica que saímos do espaço-tempo curvo para o espaço-tempo plano, espaço-tempo de Minkowski.

Além disso, discutimos algumas implicações que são previstas por esta solução obtida, um desses resultados é a existência de um dos objetos astrofísicos mais exóticos do universo, os buracos negro.

Este trabalho foi essencial para me envolver muito mais no campo da Física, uma vez que pretendo seguir o ramo da Relatividade Geral e Cosmologia no mestrado. Estudar o universo, sempre foi e sempre será algo transcendental.

REFERÊNCIAS

A. Einstein, **Relativity: The Special and the General Theory** (Ancient Wisdom Publications, London, 2010).

EINSTEIN, A. e ROSEN, N., **On gravitational waves**, Journal of the Franklin Institute, 223, 43–54, 1937.

B. J. Carr e S. W. Hawking, **Black holes in the early universe**, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society 168(2), 399 (1974).

C. M. G. G. Franchi, R. G. Reis e M. F. Borges Neto, **Breve história dos buracos negros**, Revista UNILAGO 11(41), 41 (2012).

C.W. Misner, K.S. Thorne and J.A. Wheeler, **Gravitation** (W.H. Freeman and Company, San Francisco, 1973).

D. Soares, **Espaço e espaço-tempo nas teorias relativistas**, disponível em <http://lilith.fisica.ufmg.br/dsoares/esptmp/esptmp.htm>, (2013).

D. Soares, **O universo estático de Einstein**, Revista Brasileira de Ensino de Física, Vol. 34, 2012.

D. Soares, **Os fundamentos físico-matemáticos da cosmologia relativista**. Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 35, n. 3, 3302-6, setembro, (2013). Disponível em: <https://www.scielo.br/j/rbef/a/vKtj3KVj7fCdhfkqJP8NY3H/?format=pdf&lang=pt>. Acesso em: 05/2022.

D. Soares, **Uma pedra no caminho da Teoria da Relatividade Geral**. Revista Brasileira de Ensino de Física, Vol. 29, 2007.

De Sabbata, Venzo and Maurizio Gasperini. **INTRODUCTION TO GRAVITATION**. Singapore: World Scientific, 1985.

D'Inverno, Ray. **INTRODUCING EINSTEIN'S RELATIVITY**. New York: Oxford University, 1992.

E. Harrison, **Cosmology - The Science of the Universe** (Cambridge University Press, Cambridge, 2000).

E.F. Taylor e J.A. Wheeler, **Exploring Black Holes: Introduction to General Relativity** (Addison Wesley Longman, San Francisco, 2000).

E.F. Taylor and J.A. Wheeler, **Spacetime Physics Introduction to Special Relativity** (W.H. Freeman and Company, New York, 1992).

F. Hoyle, G. Burbidge and J.V. Narlikar, **A Different Approach to Cosmology: from a Static Universe through the Big Bang towards Reality** (Cambridge University Press, Cambridge, 2000).

J. Michell, Phil. **Transc.** Roy. Soc. of London 74, 35 (1784).

K. Thorne, **Black Holes and Time Warps: Einstein's Outrageous Legacy** (W.W. Norton & Company, New York, 1994).

M. Harwit, **Astrophysical Concepts** (Springer, Nova York, 1998).

R. Feynman, **QED: The Strange Theory of Light and Matter** (Princeton University Press, Princeton, 2006).

R. Penrose, **Gravitational collapse and space-time singularities**, Physical Review Letters 14 (1965), 57–59.

S. Waner, **Introduction to Differential Geometry and General Relativity** (Lecture Notes) (www.zweigmedia.com/diff_geom/tc.html, 2002).

S. W. Hawking, R. Penrose e H. Bondi, **The singularities of gravitational collapse and cosmology**, **Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences** 314(1519), 529 (1970).

SILVA, Monalisa. **Obtenção da solução cosmológica de Schwarzschild de Sitter via transformação conforme local**. Orientador: Guilherme de Barredo-Peixoto. 2013. 42. Dissertação (Mestrado) – Física, Departamento de Física - DF, UFJF, Minas Gerais, 2013.

W. Rindler, **Relativity – Special, General, and Cosmological** (Oxford University Press, New York, 2006).

APÊNDICE

APÊNDICE A - COMPONENTES DO SÍMBOLO DE CHRISTOFFEL

Nesta seção, vamos calcular todos os componentes do símbolo de Christoffel, partindo desta equação:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} = \frac{1}{2}g^{\rho\beta}(\partial_{\nu}g_{\beta\mu} + \partial_{\mu}g_{\beta\nu} - \partial_{\beta}g_{\mu\nu}). \quad (41)$$

Para tanto, devemos permutar os índices μ, ν e ρ e achar todas as configurações possíveis, levando em consideração as propriedades que foram apresentadas no referencial teórico. É possível notar que existem quatro possibilidades para permutar os índices, uma vez que

- I. todos os índices são iguais;
- II. os índices inferiores são iguais e diferente do índice superior;
- III. um índice superior é igual a um inferior;
- IV. todos os índices são diferentes.

A dinâmica para calcular os símbolos de Christoffel consiste em derivar um dos elementos que estão postos na matriz da métrica covariante nas posições g_{00} , g_{11} , g_{22} e g_{33} , em relação a t , r , θ ou φ , como mostra as matrizes, equação (37). Depois multiplicamos o resultado dessa derivada pelo termo da matriz contravariante, que é g^{00} , g^{11} , g^{22} e g^{33} , o inverso da matriz covariante. É muito importante ficar atento à permutação dos índices.

- I. Todos os índices são iguais: $\mu = \nu = \rho$. Substituindo os índices na equação (41) e permutando de 0 a 3, encontraremos as seguintes relações:

$$\Gamma_{\rho\rho}^{\rho} = \frac{1}{2}g^{\rho\rho}\partial_{\rho}g_{\rho\rho} \quad (42)$$

$$\rho = 0, \Gamma_{00}^0 = \frac{1}{2}g^{00}\partial_0g_{00} \Rightarrow \Gamma_{00}^0 = \frac{1}{2}\frac{1}{e^{\lambda(r)}}\frac{\partial}{\partial t}(e^{\lambda(r)}) = 0; \quad (43)$$

$$\rho = 1, \Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2}g^{11}\partial_1g_{11} \Rightarrow \Gamma_{11}^1 = -\frac{v'(r)}{2}; \quad (44)$$

$$\rho = 2, \Gamma_{22}^2 = \frac{1}{2}g^{22}\partial_2g_{22} \Rightarrow \Gamma_{22}^2 = 0; \quad (45)$$

$$\rho = 3, \Gamma_{33}^3 = \frac{1}{2}g^{33}\partial_3g_{33} \Rightarrow \Gamma_{33}^3 = 0. \quad (46)$$

- II. Índices inferiores iguais e diferente do índice superior: $\mu = \rho$; $\rho = \nu$.

$$\Gamma_{\rho\rho}^{\nu} = -\frac{1}{2}g^{\nu\nu}\partial_{\nu}g_{\rho\rho} \quad (47)$$

Fixando $\nu = 0$ e variando ρ :

$$\Gamma_{11}^0 = -\frac{1}{2}g^{00}\partial_0 g_{11} \Rightarrow \Gamma_{11}^0 = 0; \quad (48)$$

$$\Gamma_{33}^0 = \Gamma_{22}^0 = \Gamma_{11}^0 = \Gamma_{00}^0 = -\frac{1}{2}g^{00}\partial_0 g_{\mu\mu} = 0. \quad (49)$$

Fixando $\nu = 1$ e variando ρ :

$$\Gamma_{00}^1 = -\frac{1}{2}g^{11}\partial_1 g_{00} \Rightarrow \Gamma_{00}^1 = \frac{\lambda'(r)}{2}e^{(\lambda(r)-\nu(r))}; \quad (50)$$

$$\Gamma_{22}^1 = -\frac{1}{2}g^{11}\partial_1 g_{22} \Rightarrow \Gamma_{22}^1 = -re^{-\nu(r)}; \quad (51)$$

$$\Gamma_{33}^1 = -\frac{1}{2}g^{11}\partial_1 g_{33} \Rightarrow \Gamma_{33}^1 = -re^{-\nu(r)}\text{Sin}^2\theta. \quad (52)$$

Fixando $\nu = 2$ e variando ρ :

$$\Gamma_{00}^2 = -\frac{1}{2}g^{22}\partial_2 g_{00} \Rightarrow \Gamma_{00}^2 = 0; \quad (53)$$

$$\Gamma_{11}^2 = -\frac{1}{2}g^{22}\partial_2 g_{11} \Rightarrow \Gamma_{11}^2 = 0; \quad (54)$$

$$\Gamma_{33}^2 = -\frac{1}{2}g^{22}\partial_2 g_{33} \Rightarrow \Gamma_{33}^2 = -\text{Sin}\theta\text{Cos}\theta. \quad (55)$$

Fixando $\nu = 3$ e variando ρ

$$\Gamma_{00}^3 = -\frac{1}{2}g^{33}\partial_3 g_{00} \Rightarrow \Gamma_{00}^3 = 0. \quad (56)$$

III. Índice superior é igual a um inferior: $\nu = \rho$.

$$\Gamma_{\mu\rho}^\rho = \frac{1}{2}g^{\rho\rho}\partial_\mu g_{\rho\rho} \quad (57)$$

Fixando $\mu = 0$ e variando ρ

$$\Gamma_{01}^1 = \frac{1}{2}g^{11}\partial_0 g_{11} \Rightarrow \Gamma_{01}^1 = 0; \quad (58)$$

$$\Gamma_{01}^1 = \Gamma_{02}^2 = \Gamma_{03}^3 = \frac{1}{2}g^{\rho\rho}\partial_0 g_{\rho\rho} = 0. \quad (59)$$

Fixando $\mu = 1$ e variando ρ :

$$\Gamma_{10}^0 = \frac{1}{2}g^{00}\partial_1 g_{00} \Rightarrow \Gamma_{10}^0 = \Gamma_{01}^0 = \frac{\lambda'(r)}{2}; \quad (60)$$

$$\Gamma_{12}^2 = \frac{1}{2}g^{22}\partial_1 g_{22} \Rightarrow \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{r}; \quad (61)$$

$$\Gamma_{13}^3 = \frac{1}{2}g^{33}\partial_1 g_{33} \Rightarrow \Gamma_{13}^3 = \Gamma_{31}^3 = \frac{1}{r}. \quad (62)$$

Fixando $\mu = 2$ e variando ρ :

$$\Gamma_{20}^0 = \frac{1}{2}g^{00}\partial_2 g_{00} \Rightarrow \Gamma_{20}^0 = \Gamma_{02}^0 = 0; \quad (63)$$

$$\Gamma_{21}^1 = \frac{1}{2}g^{11}\partial_2 g_{11} \Rightarrow \Gamma_{21}^1 = \Gamma_{12}^1 = 0; \quad (64)$$

$$\Gamma_{23}^3 = \frac{1}{2}g^{33}\partial_2 g_{33} \Rightarrow \Gamma_{23}^3 = \Gamma_{32}^3 = \text{Cot}\theta. \quad (65)$$

Fixando $\mu = 3$ e variando ρ :

$$\Gamma_{3\rho}^{\rho} = \Gamma_{\rho 3}^{\rho} = \frac{1}{2}g^{\rho\rho}\partial_{\varphi}g_{\rho\rho} = 0; \quad (66)$$

$$\Gamma_{30}^0 = \Gamma_{03}^0 = \Gamma_{31}^1 = \Gamma_{13}^1 = \Gamma_{32}^2 = \Gamma_{23}^2 = 0. \quad (67)$$

IV. Todos os índices são diferentes: $\mu \neq \nu \neq \rho$. Fazendo uma permutação cíclica dos índices, chegaremos em $\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} = 0$. (68)

APÊNDICE B - COMPONENTES DO TENSOR DE RICCI

Nosso próximo passo é encontrar os componentes do tensor de Ricci. Logo após, montaremos e resolveremos a seguinte equação

$$R_{\mu\nu} = \partial_{\sigma}\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} - \partial_{\nu}\Gamma_{\mu\sigma}^{\sigma} + \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}\Gamma_{\alpha\sigma}^{\sigma} - \Gamma_{\mu\sigma}^{\alpha}\Gamma_{\alpha\nu}^{\sigma} \Rightarrow R_{\mu\nu} = 0, \quad (69)$$

quando $\mu = \nu = 0$; $\mu = \nu = 1$; $\mu = \nu = 2$; $\mu = \nu = 3$. Fazendo isso, reduzimos o número de equações de 16 para 4 já que os outros componentes são zero, tendo em vista que os únicos componentes da métrica que não são nulos são os termos da diagonal principal da métrica, os listados acima.

Substituindo os índices na equação (69), teremos o seguinte conjunto de equações:

$$1. \mu = \nu = 0 \Rightarrow R_{00} = \partial_{\sigma}\Gamma_{00}^{\sigma} - \partial_0\Gamma_{0\sigma}^{\sigma} + \Gamma_{00}^{\alpha}\Gamma_{\alpha\sigma}^{\sigma} - \Gamma_{0\sigma}^{\alpha}\Gamma_{\alpha 0}^{\sigma}; \quad (70)$$

$$2. \mu = \nu = 1 \Rightarrow R_{11} = \partial_{\sigma}\Gamma_{11}^{\sigma} - \partial_1\Gamma_{1\sigma}^{\sigma} + \Gamma_{11}^{\alpha}\Gamma_{\alpha\sigma}^{\sigma} - \Gamma_{1\sigma}^{\alpha}\Gamma_{\alpha 1}^{\sigma}; \quad (71)$$

$$3. \mu = \nu = 2 \Rightarrow R_{22} = \partial_{\sigma}\Gamma_{22}^{\sigma} - \partial_2\Gamma_{2\sigma}^{\sigma} + \Gamma_{22}^{\alpha}\Gamma_{\alpha\sigma}^{\sigma} - \Gamma_{2\sigma}^{\alpha}\Gamma_{\alpha 2}^{\sigma}; \quad (72)$$

$$4. \mu = \nu = 3 \Rightarrow R_{33} = \partial_{\sigma}\Gamma_{33}^{\sigma} - \partial_3\Gamma_{3\sigma}^{\sigma} + \Gamma_{33}^{\alpha}\Gamma_{\alpha\sigma}^{\sigma} - \Gamma_{3\sigma}^{\alpha}\Gamma_{\alpha 3}^{\sigma}. \quad (73)$$

É importante salientar que, para $\mu \neq \nu$, teremos outras 12 equações zeradas. Resolvendo a primeira equação:

$$\mu = \nu = 0; R_{00} = \partial_{\sigma}\Gamma_{00}^{\sigma} - \partial_0\Gamma_{0\sigma}^{\sigma} + \Gamma_{00}^{\alpha}\Gamma_{\alpha\sigma}^{\sigma} - \Gamma_{0\sigma}^{\alpha}\Gamma_{\alpha 0}^{\sigma}. \quad (70)$$

Abrindo o primeiro termo:

$$\partial_{\sigma}\Gamma_{00}^{\sigma} = \partial_0\Gamma_{00}^0 + \partial_1\Gamma_{00}^1 + \partial_2\Gamma_{00}^2 + \partial_3\Gamma_{00}^3. \quad (74)$$

Observamos nas relações dos símbolos de Christoffel que só sobreviverá o segundo termo da expressão acima, logo

$$\partial_{\sigma}\Gamma_{00}^{\sigma} = \partial_1\Gamma_{00}^1 = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\lambda'(r)}{2} e^{(\lambda(r)-\nu(r))} \right),$$

que simplificando, teremos

$$\partial_{\sigma} \Gamma_{00}^{\sigma} = \partial_1 \Gamma_{00}^1 = \frac{1}{2} e^{(\lambda(r)-v(r))} (\lambda''(r) + \lambda'(r)(\lambda'(r) - v'(r))). \quad (75)$$

Podemos notar que o segundo termo da equação será nulo, esse termo se refere ao sistema estático.

Abrindo o terceiro termo:

$$\begin{aligned} \Gamma_{00}^{\alpha} \Gamma_{\alpha\sigma}^{\sigma} = & \Gamma_{00}^0 (\Gamma_{00}^0 + \Gamma_{01}^1 + \Gamma_{02}^2 + \Gamma_{03}^3) + \Gamma_{00}^1 (\Gamma_{10}^0 + \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{13}^3) \\ & + \Gamma_{00}^2 (\Gamma_{20}^0 + \Gamma_{21}^1 + \Gamma_{22}^2 + \Gamma_{23}^3) + \Gamma_{00}^3 (\Gamma_{30}^0 + \Gamma_{31}^1 + \Gamma_{32}^2 + \Gamma_{33}^3), \end{aligned} \quad (76)$$

organizando os termos, encontraremos

$$\Gamma_{00}^{\alpha} \Gamma_{\alpha\sigma}^{\sigma} = \frac{1}{2} \lambda'(r) \left(\frac{1}{2} \lambda'(r) + \frac{1}{2} v'(r) + \frac{2}{r} \right) e^{(\lambda(r)-v(r))}. \quad (77)$$

Abrindo o quarto termo:

$$\begin{aligned} \Gamma_{0\sigma}^{\alpha} \Gamma_{\alpha 0}^{\sigma} = & \Gamma_{00}^0 \Gamma_{00}^0 + \Gamma_{01}^0 \Gamma_{00}^1 + \Gamma_{02}^0 \Gamma_{00}^2 + \Gamma_{03}^0 \Gamma_{00}^3 + \\ & \Gamma_{00}^1 \Gamma_{10}^0 + \Gamma_{01}^1 \Gamma_{10}^1 + \Gamma_{02}^1 \Gamma_{10}^2 + \Gamma_{03}^1 \Gamma_{10}^3 + \\ & \Gamma_{00}^2 \Gamma_{20}^0 + \Gamma_{01}^2 \Gamma_{20}^1 + \Gamma_{02}^2 \Gamma_{20}^2 + \Gamma_{03}^2 \Gamma_{20}^3 + \\ & \Gamma_{00}^3 \Gamma_{30}^0 + \Gamma_{01}^3 \Gamma_{30}^1 + \Gamma_{02}^3 \Gamma_{30}^2 + \Gamma_{03}^3 \Gamma_{30}^3, \end{aligned} \quad (78)$$

simplificando, encontramos

$$\Gamma_{0\sigma}^{\alpha} \Gamma_{\alpha 0}^{\sigma} = \Gamma_{01}^0 \Gamma_{00}^1 + \Gamma_{00}^1 \Gamma_{10}^0.$$

Logo, teremos

$$\Gamma_{0\sigma}^{\alpha} \Gamma_{\alpha 0}^{\sigma} = \frac{\lambda^2(r)}{2} e^{(\lambda(r)-v(r))}. \quad (79)$$

Com isso, montamos a primeira equação:

$$\begin{aligned} R_{00} = 0 \Rightarrow R_{00} = & \frac{1}{2} e^{(\lambda(r)-v(r))} (\lambda''(r) + \lambda'(r)(\lambda'(r) - v'(r))) + \\ & \frac{1}{2} \lambda'(r) \left(\frac{1}{2} \lambda'(r) + \frac{1}{2} v'(r) + \frac{2}{r} \right) e^{(\lambda(r)-v(r))} + \\ & \frac{\lambda^2(r)}{2} e^{(\lambda(r)-v(r))}. \end{aligned} \quad (80)$$

Simplificando a expressão acima, chegaremos em:

$$\frac{\lambda''(r)}{2} + \frac{\lambda^2(r)}{4} - \frac{\lambda'(r)v'(r)}{4} + \frac{\lambda'(r)}{r} = 0. \quad (81)$$

Resolvendo a segunda equação:

$$R_{11} = 0 \Rightarrow R_{11} = \partial_{\sigma} \Gamma_{11}^{\sigma} - \partial_1 \Gamma_{1\sigma}^{\sigma} + \Gamma_{11}^{\alpha} \Gamma_{\alpha\sigma}^{\sigma} - \Gamma_{1\sigma}^{\alpha} \Gamma_{\alpha 1}^{\sigma}. \quad (71)$$

Vamos abrir o primeiro termo:

$$\partial_{\sigma} \Gamma_{11}^{\sigma} = \partial_0 \Gamma_{11}^0 + \partial_1 \Gamma_{11}^1 + \partial_2 \Gamma_{11}^2 + \partial_3 \Gamma_{11}^3, \quad (82)$$

simplificando, teremos

$$\partial_{\sigma} \Gamma_{11}^{\sigma} = \partial_1 \Gamma_{11}^1 = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{2} v'(r) \right), \quad \partial_{\sigma} \Gamma_{11}^{\sigma} = \frac{1}{2} v''(r). \quad (83)$$

Abrindo o segundo termo:

$$\begin{aligned} \partial_1 \Gamma_{1\sigma}^{\sigma} &= \partial_1 \Gamma_{10}^0 + \partial_1 \Gamma_{11}^1 + \partial_1 \Gamma_{12}^2 + \partial_1 \Gamma_{13}^3, \quad (84) \\ \partial_1 \Gamma_{1\sigma}^{\sigma} &= \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{2} \lambda'(r) \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{2} v'(r) \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \right), \end{aligned}$$

simplificando, podemos encontrar que

$$\partial_1 \Gamma_{1\sigma}^{\sigma} = \frac{1}{2} \lambda''(r) + \frac{1}{2} v''(r) - \frac{2}{r^2}. \quad (85)$$

Abrindo o terceiro termo:

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^{\alpha} \Gamma_{\alpha\sigma}^{\sigma} &= \Gamma_{11}^0 (\Gamma_{00}^0 + \Gamma_{01}^1 + \Gamma_{02}^2 + \Gamma_{03}^3) + \Gamma_{11}^1 (\Gamma_{10}^0 + \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{13}^3) \\ &+ \Gamma_{11}^2 (\Gamma_{20}^0 + \Gamma_{21}^1 + \Gamma_{22}^2 + \Gamma_{23}^3) + \Gamma_{11}^3 (\Gamma_{30}^0 + \Gamma_{31}^1 + \Gamma_{32}^2 + \Gamma_{33}^3), \quad (86) \end{aligned}$$

organizando os termos, notamos que

$$\Gamma_{11}^{\alpha} \Gamma_{\alpha\sigma}^{\sigma} = \frac{v'^2(r)}{4} + \frac{\lambda'(r)v'(r)}{4} + \frac{v'(r)}{r}. \quad (87)$$

Abrir o quarto termo:

$$\begin{aligned} \Gamma_{1\sigma}^{\alpha} \Gamma_{\alpha 1}^{\sigma} &= \Gamma_{10}^0 \Gamma_{01}^0 + \Gamma_{10}^1 \Gamma_{11}^0 + \Gamma_{10}^2 \Gamma_{21}^0 + \Gamma_{10}^3 \Gamma_{31}^0 + \\ &\Gamma_{11}^0 \Gamma_{01}^1 + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{21}^1 + \Gamma_{11}^3 \Gamma_{31}^1 + \\ &\Gamma_{12}^0 \Gamma_{01}^2 + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{21}^2 + \Gamma_{12}^3 \Gamma_{31}^2 + \\ &\Gamma_{13}^0 \Gamma_{01}^3 + \Gamma_{13}^1 \Gamma_{11}^3 + \Gamma_{13}^2 \Gamma_{21}^3 + \Gamma_{13}^3 \Gamma_{31}^3, \quad (88) \end{aligned}$$

simplificando a expressão e substituindo os componentes, veremos que

$$\Gamma_{1\sigma}^{\alpha} \Gamma_{\alpha 1}^{\sigma} = \frac{\lambda^2(r)}{4} + \frac{v'^2(r)}{4} + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2}. \quad (89)$$

Finalmente, montamos a segunda equação:

$$\begin{aligned} R_{11} = 0; R_{11} &= \frac{1}{2} v''(r) - \left(\frac{1}{2} \lambda''(r) + \frac{1}{2} v''(r) - \frac{2}{r^2} \right) + \\ &\frac{v'^2(r)}{4} + \frac{\lambda'(r)v'(r)}{4} + \frac{v'(r)}{r} - \left(\frac{\lambda^2(r)}{4} + \frac{v'^2(r)}{4} + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2} \right). \quad (90) \end{aligned}$$

Organizando a expressão acima, chegaremos em:

$$\frac{\lambda''(r)}{2} + \frac{\lambda^2(r)}{4} - \frac{\lambda'(r)v'(r)}{4} - \frac{v'(r)}{r} = 0. \quad (91)$$

Resolvendo a terceira equação:

$$\mu = \nu = 2; R_{22} = \partial_{\sigma} \Gamma_{22}^{\sigma} - \partial_2 \Gamma_{2\sigma}^{\sigma} + \Gamma_{22}^{\alpha} \Gamma_{\alpha\sigma}^{\sigma} - \Gamma_{2\sigma}^{\alpha} \Gamma_{\alpha 2}^{\sigma}. \quad (72)$$

Vamos abrir o primeiro termo:

$$\partial_{\sigma} \Gamma_{22}^{\sigma} = \partial_0 \Gamma_{22}^0 + \partial_1 \Gamma_{22}^1 + \partial_2 \Gamma_{22}^2 + \partial_3 \Gamma_{22}^3, \quad (92)$$

chegaremos em

$$\partial_{\sigma} \Gamma_{22}^{\sigma} = \partial_1 \Gamma_{22}^1 = rv'(r)e^{-v(r)} - e^{-v(r)}. \quad (93)$$

Abrindo o segundo termo:

$$\partial_2 \Gamma_{2\sigma}^{\sigma} = \partial_2 \Gamma_{20}^0 + \partial_2 \Gamma_{21}^1 + \partial_2 \Gamma_{22}^2 + \partial_2 \Gamma_{23}^3, \quad (94)$$

simplificando, encontramos

$$\partial_2 \Gamma_{2\sigma}^{\sigma} = \partial_2 \Gamma_{23}^3 = -Csc^2\theta. \quad (95)$$

Abrindo o terceiro termo:

$$\begin{aligned} \Gamma_{22}^{\alpha} \Gamma_{\alpha\sigma}^{\sigma} = & \Gamma_{22}^0 (\Gamma_{00}^0 + \Gamma_{01}^1 + \Gamma_{02}^2 + \Gamma_{03}^3) + \Gamma_{22}^1 (\Gamma_{10}^0 + \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{13}^3) \\ & + \Gamma_{22}^2 (\Gamma_{20}^0 + \Gamma_{21}^1 + \Gamma_{22}^2 + \Gamma_{23}^3) + \Gamma_{22}^3 (\Gamma_{30}^0 + \Gamma_{31}^1 + \Gamma_{32}^2 + \Gamma_{33}^3). \end{aligned} \quad (96)$$

Substituindo os símbolos e reorganizando, encontraremos

$$\Gamma_{22}^{\alpha} \Gamma_{\alpha\sigma}^{\sigma} = \Gamma_{22}^1 (\Gamma_{10}^0 + \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{13}^3),$$

o mesmo que

$$\Gamma_{22}^{\alpha} \Gamma_{\alpha\sigma}^{\sigma} = -\frac{\lambda'(r)re^{-v(r)}}{2} - \frac{-v'(r)re^{-v(r)}}{2} - e^{-v(r)}. \quad (97)$$

Abrindo o quarto termo:

$$\begin{aligned} \Gamma_{2\sigma}^{\alpha} \Gamma_{\alpha 2}^{\sigma} = & \Gamma_{20}^0 \Gamma_{02}^0 + \Gamma_{20}^1 \Gamma_{12}^0 + \Gamma_{20}^2 \Gamma_{22}^0 + \Gamma_{20}^3 \Gamma_{32}^0 + \\ & \Gamma_{21}^0 \Gamma_{02}^1 + \Gamma_{21}^1 \Gamma_{12}^1 + \Gamma_{21}^2 \Gamma_{22}^1 + \Gamma_{21}^3 \Gamma_{32}^1 + \\ & \Gamma_{22}^0 \Gamma_{02}^2 + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{22}^2 \Gamma_{22}^2 + \Gamma_{22}^3 \Gamma_{32}^2 + \\ & \Gamma_{23}^0 \Gamma_{02}^3 + \Gamma_{23}^1 \Gamma_{12}^3 + \Gamma_{23}^2 \Gamma_{22}^3 + \Gamma_{23}^3 \Gamma_{32}^3. \end{aligned} \quad (98)$$

Substituindo os símbolos e reorganizando, encontraremos

$$\Gamma_{2\sigma}^{\alpha} \Gamma_{\alpha 2}^{\sigma} = \Gamma_{21}^2 \Gamma_{22}^1 + \Gamma_{23}^3 \Gamma_{32}^3.$$

Simplificamos para encontramos a seguinte relação

$$\Gamma_{2\sigma}^{\alpha} \Gamma_{\alpha 2}^{\sigma} = Cot^2\theta - e^{-v(r)}. \quad (99)$$

Reorganizando os termos, montamos a terceira equação:

$$R_{22} = 0$$

$$R_{22} = rv'(r)e^{-v(r)} - e^{-v(r)} - (-Csc^2\theta) + \left(-\frac{\lambda'(r)re^{-v(r)}}{2} - \frac{-v'(r)re^{-v(r)}}{2} - e^{-v(r)}\right) - (Cot^2\theta - e^{-v(r)}). \quad (100)$$

Simplificando, teremos que

$$\left(1 + \frac{r}{2}(\lambda'(r) - v'(r))\right)e^{-v(r)} - 1 = 0. \quad (101)$$

Por fim, montaremos a quarta equação:

$$R_{33} = 0; R_{33} = \partial_{\sigma} \Gamma_{33}^{\sigma} - \partial_3 \Gamma_{3\sigma}^{\sigma} + \Gamma_{33}^{\alpha} \Gamma_{\alpha\sigma}^{\sigma} - \Gamma_{3\sigma}^{\alpha} \Gamma_{\alpha 3}^{\sigma}. \quad (73)$$

Abrindo o primeiro termo:

$$\partial_{\sigma} \Gamma_{33}^{\sigma} = \partial_0 \Gamma_{33}^0 + \partial_1 \Gamma_{33}^1 + \partial_2 \Gamma_{33}^2 + \partial_3 \Gamma_{33}^3, \quad (102)$$

organizando, encontraremos

$$\partial_{\sigma} \Gamma_{33}^{\sigma} = -e^{-v(r)} \text{Sin}^2\theta + rv'(r)e^{-v(r)} \text{Sin}^2\theta + \text{Sin}^2\theta - \text{Cos}^2\theta. \quad (103)$$

Abrindo o segundo termo:

$$\partial_3 \Gamma_{3\sigma}^{\sigma} = \partial_3 \Gamma_{30}^0 + \partial_3 \Gamma_{31}^1 + \partial_3 \Gamma_{32}^2 + \partial_3 \Gamma_{33}^3. \quad (104)$$

Esse caso é trivial, como pode-se perceber

$$\partial_3 \Gamma_{3\sigma}^{\sigma} = 0. \quad (105)$$

Abrindo o terceiro termo:

$$\begin{aligned} \Gamma_{33}^{\alpha} \Gamma_{\alpha\sigma}^{\sigma} &= \Gamma_{33}^0 (\Gamma_{00}^0 + \Gamma_{01}^1 + \Gamma_{02}^2 + \Gamma_{03}^3) + \Gamma_{33}^1 (\Gamma_{10}^0 + \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{13}^3) \\ &+ \Gamma_{33}^2 (\Gamma_{20}^0 + \Gamma_{21}^1 + \Gamma_{22}^2 + \Gamma_{23}^3) + \Gamma_{33}^3 (\Gamma_{30}^0 + \Gamma_{31}^1 + \Gamma_{32}^2 + \Gamma_{33}^3). \end{aligned} \quad (106)$$

Reduzimos a equação anterior para

$$\Gamma_{33}^{\alpha} \Gamma_{\alpha\sigma}^{\sigma} = \Gamma_{33}^1 (\Gamma_{10}^0 + \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{13}^3) + \Gamma_{33}^2 \Gamma_{23}^3,$$

simplificando, notamos que

$$\Gamma_{33}^{\alpha} \Gamma_{\alpha\sigma}^{\sigma} = -re^{-v(r)} \text{Sin}^2\theta \left(\frac{1}{2}\lambda'(r) + \frac{1}{2}v'(r) + \frac{2}{r}\right) + (-\text{Sin}\theta\text{Cos}\theta)\text{Cot}\theta. \quad (107)$$

Abrindo o quarto termo:

$$\begin{aligned} \Gamma_{3\sigma}^{\alpha} \Gamma_{\alpha 3}^{\sigma} &= \Gamma_{30}^0 \Gamma_{03}^0 + \Gamma_{30}^1 \Gamma_{13}^0 + \Gamma_{30}^2 \Gamma_{23}^0 + \Gamma_{30}^3 \Gamma_{33}^0 + \\ &\Gamma_{31}^0 \Gamma_{03}^1 + \Gamma_{31}^1 \Gamma_{13}^1 + \Gamma_{31}^2 \Gamma_{23}^1 + \Gamma_{31}^3 \Gamma_{33}^1 + \\ &\Gamma_{32}^0 \Gamma_{03}^2 + \Gamma_{32}^1 \Gamma_{13}^2 + \Gamma_{32}^2 \Gamma_{23}^2 + \Gamma_{32}^3 \Gamma_{33}^2 + \end{aligned}$$

$$\Gamma_{33}^0 \Gamma_{03}^3 + \Gamma_{33}^1 \Gamma_{13}^3 + \Gamma_{33}^2 \Gamma_{23}^3 + \Gamma_{33}^3 \Gamma_{33}^3. \quad (108)$$

A equação anterior se resume em

$$\Gamma_{3\sigma}^\alpha \Gamma_{\alpha 3}^\sigma = \Gamma_{31}^3 \Gamma_{33}^1 + \Gamma_{32}^3 \Gamma_{33}^2 + \Gamma_{33}^1 \Gamma_{13}^3 + \Gamma_{33}^2 \Gamma_{23}^3,$$

que simplificando, teremos

$$\begin{aligned} \Gamma_{3\sigma}^\alpha \Gamma_{\alpha 3}^\sigma &= \frac{1}{r} (-re^{-v(r)} \text{Sin}^2\theta) + (-\text{Sin}\theta \text{Cos}\theta) \text{Cot}\theta \\ &+ (-re^{-v(r)} \text{Sin}^2\theta) \frac{1}{r} + (-\text{Sin}\theta \text{Cos}\theta) \text{Cot}\theta. \end{aligned} \quad (109)$$

Finalmente, organizando os termos com as equações encontradas anteriormente, montamos a quarta equação:

$$R_{33} = 0;$$

$$\begin{aligned} R_{33} &= -e^{-v(r)} \text{Sin}^2\theta + rv'(r)e^{-v(r)} \text{Sin}^2\theta + \text{Sin}^2\theta - \text{Cos}^2\theta \\ &- re^{-v(r)} \text{Sin}^2\theta \left(\frac{1}{2} \lambda'(r) + \frac{1}{2} v'(r) + \frac{2}{r} \right) + (-\text{Sin}\theta \text{Cos}\theta) \text{Cot}\theta \\ &- \left(\frac{1}{r} (-re^{-v(r)} \text{Sin}^2\theta) + (-\text{Sin}\theta \text{Cos}\theta) \text{Cot}\theta \right) \\ &+ (-re^{-v(r)} \text{Sin}^2\theta) \frac{1}{r} + (-\text{Sin}\theta \text{Cos}\theta) \text{Cot}\theta. \end{aligned} \quad (110)$$

Simplificando a equação anterior, chegaremos em

$$\left[\left(1 + \frac{r}{2} (\lambda'(r) - v'(r)) \right) e^{-v(r)} - 1 \right] \text{Sin}^2\theta = 0. \quad (111)$$

Com isso, montamos o seguinte sistema de equações:

$$\frac{\lambda''(r)}{2} + \frac{\lambda'^2(r)}{4} - \frac{\lambda'(r)v'(r)}{4} + \frac{\lambda'(r)}{r} = 0 \quad (81)$$

$$\frac{\lambda''(r)}{2} + \frac{\lambda'^2(r)}{4} - \frac{\lambda'(r)v'(r)}{4} - \frac{v'(r)}{r} = 0 \quad (91)$$

$$\left(1 + \frac{r}{2} (\lambda'(r) - v'(r)) \right) e^{-v(r)} - 1 = 0 \quad (101)$$

$$\left[\left(1 + \frac{r}{2} (\lambda'(r) - v'(r)) \right) e^{-v(r)} - 1 \right] \text{Sin}^2\theta = 0. \quad (111)$$

ANEXO

ANEXO A - TENSORES GERAIS

Conhecendo a transformação que liga dois sistemas de coordenadas e os componentes de um tensor em um desses sistemas, é possível calcular esses componentes no outro sistema [11].

De modo geral, o conjunto de D^{n+m} funções implica em um tensor $T_{i_1 \dots i_n}^{j_1 \dots j_m}(x)$, onde D é a dimensão da variedade adotada, formam um “tensor do tipo (m, n)” ou “tensor misto de ordem covariante n e contravariante m”, se essas funções se transformam, sob a mudança de coordenadas de base, como:

$$T_{i'_1 \dots i'_n}^{j'_1 \dots j'_m}(x') = \frac{\partial x^{j'_1}}{\partial x^{i'_1}} \dots \frac{\partial x^{j'_m}}{\partial x^{i'_m}} \frac{\partial x^{k_1}}{\partial x^{i'_1}} \dots \frac{\partial x^{k_n}}{\partial x^{i'_n}} T_{k_1 \dots k_n}^{l_1 \dots l_m}(x). \quad (7)$$

Apesar das componentes de um tensor serem dependentes da escolha da base, o tensor por si mesmo é independente das coordenadas, podendo, então, ser visto como um objeto geométrico. Por definição, um tensor continua sendo um tensor sob mudança de coordenadas.

Com relação às suas componentes, um tensor pode ser definido como:

- Tensor simétrico: o tensor T^{ijk} é chamado “simétrico” nos índices i e j se:

$$T^{ijk} = T^{jik}. \quad (8)$$

- Tensor antissimétrico: o tensor T^{ijk} é chamado “antissimétrico” nos índices i e j se:

$$T^{ijk} = -T^{jik}. \quad (9)$$

ANEXO B - DERIVADA COVARIANTE

Em geral, quando aplicamos uma derivada parcial em um tensor, não obtemos um tensor como resultado. Este fato pode ser contornado adicionando alguns termos à derivada parcial, tal que o resultado seja um tensor. A derivada de um tensor cujo resultado é um outro tensor é chamada de “derivada covariante” e é definida por:

$$\nabla_{i'} A_{k_1 k_2 \dots}^{j_1 j_2 \dots} = \partial_{i'} A_{k_1 k_2 \dots}^{j_1 j_2 \dots} + \Gamma_{li}^{j_1} A_{k_1 k_2 \dots}^{l j_2 \dots} + \Gamma_{li}^{j_2} A_{k_1 k_2 \dots}^{j_1 l \dots} + \dots - \Gamma_{k_1 i'}^l A_{lk_2 \dots}^{j_1 j_2 \dots} - \Gamma_{k_2 i'}^l A_{lk_1 \dots}^{j_1 j_2 \dots} - \dots, \quad (10)$$

onde, o símbolo Γ_{ji}^k é chamado “símbolo de Christoffel” ou “conexão afim” e $\partial_i = \partial/\partial x^i$.

A forma mais usual do símbolo de Christoffel é expressa via tensor métrico, da seguinte forma:

$$\Gamma_{ji}^k = \frac{1}{2}g^{kl}(\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij}), \quad (11)$$

tal que os coeficientes Γ_{ji}^k satisfazem às condições:

1. Simetria:

$$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k; \quad (12)$$

2. Metricidade:

$$\nabla_i g_{jl} = \partial_i g_{jl} - \Gamma_{ij}^a g_{al} - \Gamma_{il}^a g_{ja} = 0. \quad (13)$$

Sob uma transformação de coordenadas, temos que ter:

$$\Gamma_{bc}^{'a} = \frac{\partial x^{'a}}{\partial x^d} \frac{\partial x^e}{\partial x^{'b}} \frac{\partial x^f}{\partial x^{'c}} \Gamma_{ef}^d - \frac{\partial x^d}{\partial x^{'b}} \frac{\partial x^e}{\partial x^{'c}} \frac{\partial^2 x^{'a}}{\partial x^d \partial x^e}, \quad (14)$$

para que a derivada covariante de um tensor, sob a mesma transformação de coordenadas, mantenha a forma dada pela forma geral da derivada covariante. Devido ao segundo termo do lado direito da equação acima, temos que $\Gamma_{bc}^{'a}$ não é um tensor. Os objetos que obedecem à regra de transformação, são chamados de “conexão afim”, “conexão” ou “afinidade” [11].

A derivada covariante ∇_i transforma-se como um tensor após atuar sobre um tensor e coincide com a derivada parcial em coordenadas cartesianas. A derivada covariante de um escalar é a derivada ordinária.

ANEXO C - TENSOR DE RIEMANN

Seja T^α um tensor qualquer, tal que:

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu]T^\alpha = (\nabla_\mu \nabla_\nu - \nabla_\nu \nabla_\mu)T^\alpha = -R_{\lambda\mu\nu}^\alpha T^\lambda. \quad (15)$$

O tensor $R_{\lambda\mu\nu}^\alpha$ é chamado de “tensor de Riemann” ou “tensor de curvatura” e é dado por:

$$R_{\lambda\mu\nu}^\alpha = \partial_\mu \Gamma_{\lambda\nu}^\alpha - \partial_\nu \Gamma_{\lambda\mu}^\alpha - \Gamma_{\lambda\nu}^\tau \Gamma_{\tau\mu}^\alpha - \Gamma_{\lambda\mu}^\tau \Gamma_{\tau\nu}^\alpha. \quad (16)$$

Na forma covariante e em termos da métrica, temos:

$$R_{\alpha\mu\nu\lambda} = g_{\alpha\tau} R^{\tau}_{\mu\nu\lambda} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 g_{\alpha\nu}}{\partial x^\lambda \partial x^\mu} - \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda \partial x^\alpha} - \frac{\partial^2 g_{\alpha\lambda}}{\partial x^\nu \partial x^\mu} + \frac{\partial^2 g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu \partial x^\alpha} \right] + g_{\tau\eta} [\Gamma_{\alpha\nu}^{\tau} \Gamma_{\mu\lambda}^{\eta} - \Gamma_{\lambda\alpha}^{\tau} \Gamma_{\mu\nu}^{\eta}], \quad (17)$$

tal que $R_{\alpha\mu\nu\lambda}$ obedece às propriedades:

1. Simetria:

$$R_{\alpha\mu\nu\lambda} = R_{\nu\lambda\alpha\mu}; \quad (18)$$

2. Anti-simetria:

$$R_{\alpha\mu\nu\lambda} = -R_{\mu\alpha\nu\lambda} = -R_{\alpha\mu\lambda\nu} = -R_{\mu\alpha\lambda\nu}; \quad (19)$$

3. Permutação cíclica:

$$R_{\alpha\mu\nu\lambda} + R_{\alpha\lambda\mu\nu} + R_{\alpha\nu\lambda\mu} \equiv 0; \quad (20)$$

4. Identidade de Bianchi:

$$\nabla_{\alpha} R_{\lambda\tau\mu\nu} + \nabla_{\nu} R_{\lambda\tau\alpha\mu} + \nabla_{\mu} R_{\lambda\tau\nu\alpha} \equiv 0. \quad (21)$$

ANEXO D - TENSOR DE RICCI

O Tensor de Ricci é um tensor, definido através do tensor de Riemann como:

$$R_{\alpha\mu} = g^{\nu\lambda} R_{\lambda\alpha\nu\mu}. \quad (22)$$

O escalar de Ricci, também conhecido por “escalar de curvatura” é dado por:

$$R = g^{\alpha\mu} R_{\alpha\mu}. \quad (23)$$

Em $2D$, podemos obter as seguintes relações:

$$R_{\mu\nu\alpha\beta} = \frac{1}{2} R (g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} - g_{\mu\beta} g_{\nu\alpha}), \quad (24)$$

$$R_{\mu\alpha} = \frac{1}{2} R g_{\mu\alpha}. \quad (25)$$

ANEXO E - TENSOR DE EINSTEIN

A equação de movimento para o campo métrico é dada por:

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}, \quad (26)$$

onde G é a constante gravitacional de Newton e $T_{\mu\nu}$ é o tensor energia-momento. A equação descrita pela relação anterior, também é chamada de equação de campo de Einstein e é essa equação que nos relata a dinâmica do espaço-tempo.

O tensor $G_{\mu\nu}$ é conhecido como “tensor de Einstein” e obedece à relação:

$$\nabla_{\nu} G^{\nu}_{\mu} \equiv 0, \quad (27)$$

devido à identidade de Bianchi [4].

ANEXO F - TENSOR ENERGIA-MOMENTO

Este é o tensor que descreve a atividade energética no espaço. O tensor de energia-momento fornece quantitativamente as densidades e os fluxos de energia e momento gerados pelas fontes presentes no espaço em que determinarão a geometria do espaço-tempo.

As componentes do tensor de energia-momento [5] são as seguintes:

1. T_{00} é a densidade de matéria e energia;
2. $T_{0\nu}$ é o fluxo de energia, i.e., energia por unidade de área, por unidade de tempo) na direção ν , com $\nu \neq 0$;
3. $T_{\mu 0}$ é a densidade da componente μ do momento, com $\mu \neq 0$;
4. $T_{\mu\nu}$ é o fluxo da componente μ do momento na direção ν (i.e., tensão de cisalhamento). Note que “fluxo do momento” é o mesmo que “força por área”, com $\mu, \nu \neq 0$;
5. $T_{\mu\mu}$ é o fluxo da componente μ do momento na direção μ , i.e., força sobre a área perpendicular, ou seja, pressão, que difere de “tensão de cisalhamento” exatamente por levar em conta a componente da força perpendicular à superfície sobre a qual atua, com $\mu \neq 0$.

O tensor de energia-momento é simétrico, de modo que $T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu}$ (28).

Consideram as tensões de cisalhamento sobre um cubo muito pequeno de aresta L e massa-energia igual a $T_{00}L^3$ e mostram que ele teria aceleração angular infinita caso o tensor não fosse simétrico [5]. O tensor de energia-momento, por ser simétrico, tem, no máximo, 10 componentes diferentes, ao invés das 16 de um tensor qualquer 4×4 .